Математика для пьяниц

Александр Боровик

1. Гельфанд и его притча

Моя статья – комментарий к Задаче 41 из чудесной маленькой книги Гельфанда и Шеня «Алгебра» [2], которая в «бытовой формулировке», приведенной там же, звучит так:

> «Что больше: бутылка на троих или две на семерых?»

Мне посчастливилось когда-то работать с Израилем Моисеевичем Гельфандом[1], и я слышал от него подобную задачу в форме притчи. Я хочу воспроизвести ее здесь, как она мне запомнилась, и связать ее с серьезной математикой.

> Очень важно не отрывать математику от жизни. Если этому правилу следовать, то говорить о математике можно даже с пьяницами, сидящими на скамейке возле винного магазина. Если их спросить,
>
> «Что больше, 2/3 или 3/5?»,
>
> они вас пошлют подальше, и матом. Но если спросить,
>
> «Что лучше, две бутылки на троих или три на пятерых?»
>
> Они немедленно дадут ответ. Они скажут две на троих, разумеется.

Мой рассказ будет доказывать верность известного завета Израиля Моисеевича:

> Всегда начинайте с простейшего возможного примера, и доводите его исследование до полного предела.

Как мы увидим, в этом конкретном случае, совет Гельфанда ведет очень далеко, так что читатель должежн быть готов к серьезному путешествию..

Давайте начнем с того, что будем рассматривать дроби не как числа, а как описания специфических ситуаций: $\frac{2}{3}$ означает 2 бутылки и 3 собутыльника, $\frac{3}{5}$ означает 3 бутылки и 5 собутыльников. Как попасть в ситуацию $\frac{3}{5}$ из ситуации $\frac{2}{3}$? Еще с 1 (единственной!)

Date: 01 января 2022.

[1] Я познакомился с Израилем Моисеевичем в Америке. Вот как его воспринимали изумленные американцы: B. I. Topaz. Conversations with A. S. Golubitski.

бутылкой приходят еще 2 собутыльника. На каждого из них приходится меньше выпивки, чем у их трех друзей, у которых 2 бутылки на 3х. Конечно, 3 первоначальных собутыльника ничего не выиграют от дележки с двумя пришельцами – а те выиграют.

Это рассуждение сводится к утверждению (правильному), что так как

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},$$

то

$$\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}.$$

Мы здесь видим частный случай **неравенства медианты:**

если $a, b, c, d > 0$ и

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Поговорим об этом подробнее.

2. Медианта: «нечто среднее»

Выражение

$$\frac{a+c}{b+d}$$

называется *медиантой*[2] выражений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$; оно имеет смысли и используется только для положительных чисел a, b, c, d.

Доказать неравенство медианты было упражнением в моих лекциях на подготовительном отделении в Манчестерском университете[3]—вместе с притчей, в которой я из соображений политической корректности заменил пьяниц на детей, а бутылки на пакеты с конфетами.

Упражнение 1. *Докажите неравенство медианты.*

Игорь Владимирович Арнольд[4] в статье «Принципы отбора и составления арифметических задач» [1] объясняет главный дидактический принцип преподавания арифметики и ее отличие от алгебры:

---

[2] Википедия утверждает, что понятие медианты двух дробей было впервые введено А.Я. Хинчиным [4, с. 22] в теории цепных дробей для целей лучшего уяснения взаимного расположения и закона последовательного образования промежуточных дробей. Роль цепных дробей не случайна, мы это еще увидим.

[3] Обсуждение этого курса можно найти в моей статье Logic and inequalities: remedial course bridging secondary school and undergraduate mathematics.

[4] Игорь Владимирович Арнольд был отцом Владимира Игоревича Арнольда, знаменитого российского математика

> ...обучение арифметике включает в качестве одного из основных элементов воспитание умения ориентироваться в различных по своей конкретной природе взаимоотношениях между величинами. Самый метод «арифметического решения задачи» отличается от алгебраических приёмов в первую очередь тем, что на всех стадиях рассуждения все сопоставления и производимые действия допускают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идёт речь, истолкование.

Если принять этот тезис, то медианта – понятие, принадлежащее к арифметике, это очень наглядно продемонстрировано в притче про пьяниц. Более того, она просится в школьный курс арифметики или алгебра, и не случайно появляется в качестве задачи в «Алгебре» Гельфанда и Шеня. Неравенство медианты интересно тем, что оно проявляется в природе даже когда значения величин a, b, c, d неизвестны. Например,

- сливание в один сосуд двух неизвестных объемов двух напитков разной крепости дает напиток промежуточной крепости.

Действительно, нередко это можно проверить органолептически, без измерений, просто на вкус.

Можно привести и другие примеры того, как замаскированная медианта ведет себя как «нечто среднее» (выражение из книги Гельфанда и Шеня [2, с. 24]):

- Предположим, то в двух урнах лежат черные и белые шары. Вероятность вытащить, наугад, белый шар из первой урны равна p_1, а из второй p_2. Если пересыпать все шары в одну урну, то вероятность p вытащить из нее белый шар будет удовлетворять неравенство $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$.
- Если смешать воду из двух кувшинов и разной температуры, то получившаяся вода будет иметь промежуточную температуру.

Упражнение 2. *Где и как в этих примерах спрятано неравенство медианты?*

Упражнение 3. *(Задача* 45 *из* [2].*) Метровый стержень разделили на* 7 *равных частей красными пометками и на* 13 *равных частей синими пометками. Затем его распилили на* 20 *равных частей. Докажите, что на всех этих частях (кроме крайних) будет ровно одна пометка – синяя или красная).*

3. Евклид вступает в игру

Метод сравнения дробей, который мы описали, эффективно работает, когда для решения требуется лишь один шаг, чтобы после этого ответ был сразу виден, что, сказать по совести, обычно и бывает в жизни. Вот пример, достаточно длинный, чтобы заметить, что в нем происходит и распознать скрытую структуру: что лучше, 7 бытылок на 12 собутыльников, или 17 для 29? [5]

Если в последовательности упрощений одно и то же вычитание происходит несколько раз, можно один раз вычесть кратное, например

$$\frac{7}{12} \text{ или } \frac{17}{29}\,? \quad \to \quad \frac{7}{12} \text{ или } \frac{17-7}{29-12}\,? \quad \to \quad \frac{7}{12} \text{ или } \frac{(17-7)-7}{(29-12)-12}\,?$$

можно записать как

$$\frac{7}{12} \text{ или } \frac{17}{29} \quad \to \quad \frac{7}{12} \text{ или } \frac{17-2\times 7}{29-2\times 12} = \frac{3}{5}\,?$$

Мы свели вопрос к другому: что лучше,

$$\frac{7}{12} \text{ или } \frac{3}{5}\,?$$

Теперь мы вычитаем на другой стороне неравенства:

$$\frac{7-2\times 3}{12-2\times 5} = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{3}{5}\,?$$

Следующий вопрос: а что лучше,

$$\frac{1}{2} \text{ или } \frac{3}{5}\,?$$

Это уже совсем просто:

$$\frac{1}{2} \text{ или } \frac{3}{5}\,? \quad \to \quad \frac{1}{2} \text{ или } \frac{3-2\times 1}{5-2\times 2} = \frac{1}{1} = 1\,?$$

Так как

$$\frac{1}{2} < 1,$$

мы можем обратить эти рассуждения, и неравенство медианты будет на каждом шагу обеспечивать сохранение направления неравенства. Так что ответ:

> 7 бытылок на 12 собутыльников хуже, чем 17 для 29-ти.

Если сравнить с калькулятором, то это подверждается, но разница становится заметна только на третьем десятичном знаке после запятой.

А теперь надо обратить внимание на то, что в числителях выполнялся алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя чисел 7 и 17.

[5] И слишком длинный, чтобы утверждать, что он встречается где-то в жизни.

И это не случайно – Евклид ведь описал свой алгоритм для нахождения общей меры для двух величин, то есть единицы измерения, которая выражает обе величины целыми числами. Величины, с которыми он работал, обычно были длины, площади, объемы. В задаче с пьяницами мы находимся в области математической экономики, и имеем дело с универсальной абстрактной величиной математической экономики – полезностью (utility) для потребителя. Англиский термин utility function перреводится на русский как «функция полезности». У меня язык не поворачивается применять слово «полезность» к водке и тем более к такой отраве, как вермут советских лет, поэтому я буду использовать более нейтральный термин «пригодность».

Алгоритм Евклида также производит представление рационального числа в виде цепной дроби – поэтому вовсе не удивительно, что медианта появилась в книге Хинчина о цепных дробях [4, с. 22].

Как это нередко случается в математики, все возвращается к «Началам» Евклида.

4. Евдокс

Но это было только начало нашего анализа. Мы рассмотрим более глубокий вопрос:

что лучше, две бутылки водки или пять бутылок вермута[6]?

В предперестроечные времена мужики сразу знали ответ, повидимому, полученный из долгого опыта: две бутылки водки или пять бутылок вермута более или менее равны по пригодности, то есть по силе воздействия на потребителя.[7]

В более общей форме, этот вопрос волновал еще Евдокса (примерно 408–355 до Р.Х.) и Евклида (III век до Р.Х.): как найти соотношение двух величин a и b, если все, что мы можем делать, это сравнивать, какие целочисленные кратные ma и nb, где m иn – натуральные числа, больше или меньше других?

Книга V «*Начал*» содержит теорию пропорций, как она была изложена Евклидом на основе работ Евдокса. Сами пропорции нас не интересуют, но интересно посмотреть, как там делается сравнение величин.

Как мы вскоре увидим, это фактически построение системы вещественных чисел, как это было объяснено Робом Артаном [5].

---

[6]Не знаю, помнят ли сейчас злополучный вермут советских времен? В моих родных краях, вермут местного разлива, дрянное крепленое вино, продавался в поллитровых бутылках, как и водка.

[7]Номинальная крепость водки была 40°, вермута 16°, поэтому 2 бутылки водки и 5 бутылок вермута должны были содержать одинаковое количество этанола.

Определение 4 Книги V обычно называется *Аксиомой Евдокса.* Я даю ее в переводе Мордухай-Болтовского [3].

> Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.

В наших нынешних обозначениях, это значит, что для величин a и b найдутся такие натуральные числа m и n, что $ma > b$ и $nb > a$. Конечно, это предпологает, что величины можно складывать сами с собой, и

$$ma = a + a + \cdots + a \ (m \text{ раз}).$$

В ставшем классическом ангийском переводе Хита (Heath)

> *Magnitudes are said to have a ratio to one another which is capable, when a multiple of either may exceed the other.*

5. Sir Cristopher Zeeman

Как Сэр Кристофер объясняет в [11],

> My main criticism of Euclid's treatment, however, is that he forgot to define the ratio of two ratios. More precisely, he was unable to do so because of his tactical use of subtraction in the proof of Proposition 8, on which most of the other propositions of Book V depend.

Он затем дает свой список аксиом.

Axioms for a set of magnitudes. Definition of a set of magnitudes. A set M of magnitudes is a set, ordered by size, with $\mathbb{N}$-action, satisfying the following axioms.

Order: Given $a, b \in M$, then either a is smaller than b, written $a < b$, or a is the same size as b, written $a \sim b$, or a is larger than b, written $a > b$.

Equivalence: $\sim$ is an equivalence relation:

- **$\mathbb{N}$-action:** For all $a \in M$, $n \in \mathbb{N}$, there exists $na \in M$ such that
  - $1a = a$;
  - $m(na) = (mn)$a;
  - $a \sim b \Rightarrow na \sim nb$.
  - $\mathbb{N}$-action and order: $a < b \Rightarrow na < nb$;
  - $m < n \Rightarrow ma < na$.
- **Archimedean axiom**: For all $a, b \in M$, there exists $n \in N$ such that $a < nb$.
- **New axiom**: For all $a, b \in M$, $a < b \Rightarrow$ there exists $n \in N$ such that $(n + 1)a < nb$.

6. Роб Артан

Начиная в этого места, я начинаю слегка модифицировать аксиомы Евдокса и перелагать их на современный математический язык, следуя идеям Роба Артана [5]. Увы, это неизбежно, потому что работа Евдокса и Евклида над величинами осталась не вполне развитой – это детально проанализировано в комментариях Мордухай-Болтовского на его перевод Книг V и VI, а самый современный анализ содержится в статье Сэра Кристофера Зимана [11].

Выберем одну из величин как единицу измерения, обозначим ее 1, и рассмотрим величины, которые имеют отношение с 1. Пусть a – это одна из них; очевидно, что a также имеет отношение с $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, и т.д.. Теперь для любого натурального числа $n = 1 + 1 + \cdots + 1$, мы полагаем

$$\alpha(n) = \text{ наибольшее натуральное число } m \text{ такое, что } m \leqslant an;$$

оно существует по Аксиоме Евдокса. Разумеется, если бы наши величины были числами, то оно было бы неполным частным от деления an на 1 с остатком, или, в современной терминологии, целой частью $[an]$ числа an. Но надо помнить, что у Евдокса и Евклида величины не были числами. Тем не менее, мы можем следовать Артану [5] и работать с функцией

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

и, более того, расширить ее область определения на все целые числа:

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Легко проверить, эта функция монотонная и неограниченно возрастает на $\mathbb{N}$. Также легко проверить ее очень интересное свойство: значения

$$|\alpha(k + l) - (\alpha(k) + \alpha(l))|, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

ограничены (на самом деле $|\alpha(k + l) - (\alpha(k) + \alpha(l))| \leqslant 1$), поэтому мы называем α *почти эндоморфизмом* абелевой группы $\mathbb{Z}$ и обозначаем через $\mathbb{A}$ кольцо всех почти эндоморфизмов $\mathbb{Z}$.

Упражнение 4. *Докажите эти свойства функции α.*

Обозначим множество всех величин, имеющих отношение с 1 через $\mathbb{M}$; мы только что построили отображение из $\mathbb{M}$ в $\mathbb{A}$. Структура кольца $\mathbb{A}$ может быть прояснена современными методами. Оно содержит идеал, состоящий из всех ограниченных функций из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ – они ведь являются «почти нулевыми эндоморфизмами»; обозначим этот идеал через $\mathbb{O}$.

Скорее всего, читатель уже ожидает этого результата:

Теорема 1 (Arthan [5], Grundhöfer [9])**.** *В этих обозначениях,*

$$\mathbb{A}/\mathbb{O} \simeq \mathbb{R},$$

поле вещественных чисел.

В одном направлении, изоморфизм очевиден: вещественному числу $\gamma \in \mathbb{R}$ сопоставляем почти эндоморфизм $n \mapsto [\gamma n]$.

Артан приписывает это наблюдение(видимо, неопубликованное) Стивену Шануэлю (1933 – 2014). Статья Артана, кроме того, излагает обсуждение конструкции Евдокса, принадлежащее Хиту и Де Моргану [8, Book V, pp. 120–129].

Этот результат был распространен на построение нестандартных вещественных чисел в [7] – исходя, конечно, из нестандартных целых чисел.[8]

Следующий результат должен объяснить, и самым естественным образом, как величины, которые можно только сравнивать по величине и складывать, но нельзя даже вычитать (действительно, как можно вычесть из пригодности бутылки водки пригодность бытылки вермута?) могут быть измерены вещественными числами.

Теорема 2. *Естественное отображение $\mathbb{M}$ в $\mathbb{A}/\mathbb{O}$ является вложением.*

Но для ее доказательства нужна еще одна аксиома, которую уже отождествил в своем анализе Кристофер Зиман как *New Axiom* [11], см. стр. 6. Я сформулирую ее здесь в таком виде.

> При измерении не могут возникать бесконечно малые излишки. Это значит, что если $\alpha(n) < na$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое что
>
> $$\alpha(kn) \geqslant k\alpha(n) + 1.$$

Упражнение 5. *Докажите Теорему 2.*

Почему дополнительная ахиома нужна? Она обобщает, в условия отсутствия вычитания, Ахиому Архимеда. Действительно, если бы существовало бесконечно малое число $\epsilon > 0$, то есть такое, что $n\epsilon < 1$ для всвх $n \in \mathbb{N}$ описанный сейчас процесс измерения числа ϵ относительно единицы измерения 1 не обнаружил бы разницы между ϵ и 0: для всех n имело бы место равенство

$$[n\epsilon] = 0,$$

и отображение $\mathbb{M}$ в $\mathbb{A}/\mathbb{O}$ не было бы вложением. Оно становится вложением, если распростанить его на нестандартные (бесконечо большие) натуральные числа, и это сделано в [7], но ценой расширения вещественных чисел до нестандартной модели.

[8] Простое изложении теории нестандартных вещественных чисел и нестандартного анализа может быть найдено в [10].

7. Заключение

Мы начали наше путешествие от лавочки под пыльными тополями за углом от винного магазина, спустились в глубь веков, к истокам математики, и вернулись в современность. Мне кажется, это неплохой пример для иллюстрации гельфандовского принципа:

> Всегда начинайте с простейшего возможного примера, и доводите его исследование до полного предела.

Признательности и благодарности

Автор выражает благодарность участникам Секции 6 «История преподавания математики» 2 ноября 2021 года, из обсуждений с которыми и родилась эта статья: Александру Шеню, Ольге Саввиной, Роману Мельникову, Владимиру Кондратьеву. Секция была частью Международной конференци «Классическая и современная геометрия» посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна. Автор благодарен всем организаторам конференции, и прежде всего Сергею Каракозову за очень эффективное проведение плодотворного заседания секции. Многие идеи, изложенные или упомянутые здесь, восходят к статье [7], совместной с Михаилом Кацем и Renling Jin.

Список литературы

[1] И.В. Арнольд, Принципы отбора и составления арифметических задач. Известия АПН РСФСР, 6 (1946), 8–28.
[2] И.М. Гельфанд и А.Х. Шень, Алгебра. Москва МЦМНО, 2017.
[3] Д.Д. Мордухай-Болтовский, Начала Евклида. Книги I–VI. Москва-Ленинград, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
[4] А.Я. Хинчин, Цепные дроби. Москва-Ленинград, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
[5] R.D. Arthan, The Eudoxus real numbers. arXiv:math/0405454v1 [math.HO], 2004.
[6] A.V. Borovik, Mathematics under the Microscope: Notes on Cognitive Aspects of Mathematical Practice, 317 pp. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
[7] A.V. Borovik, M. Katz and Renling Jin, An integer construction of infinitesimals: Toward a theory of Eudoxus hyperreals. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 53 no. 4 (2012) 557–570.
[8] T.L. Heath, The thirteen books of Euclid's elements, Vols I–III, 2nd edition revised with additions, Cambridge: at the University Press, 1908.
[9] T. Grundhöfer, Describing the real numbers in terms of integers. Archiv der Mathematik 85 (2005), 79–81.
[10] A.M. Robert, Nonstandard Analysis. Dover Publications Inc., 2003,
[11] E.C. Zeeman, What's wrong with Euclid Book V. Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 1–17.

Манчестерский Университет, Соединенное Королевство