Проекция Меркатора, функция $\log z$ и судоходство

Этот маленький этюд возник в результате обсуждения с Сашей Боровиком, вопроса о проекции Меркатора. Для нетерпеливого и грамотного читателя сразу оговоримся, что основное математическое содержание этого этюда сводится к предложению: цилиндрическая поверхность является униформизующей поверхностью для логарифмической функции.

Если корабль должен из точки А придти в точку Б, как ему проложить маршрут? Конечно, наикратчайшее расстояние—это дуга большого круга. Но чтобы проложить такой маршрут, нужно уметь определять местоположение корабля в любой точке пути. А представьте, что на корабле есть только компас и скорость корабля точному измерению не подается. Тогда можно выбрать маршрут—траекторию, которая проходит через точки А и Б и составляет постоянный угол с меридианами—-локсодрому. Если этот угол известен, то с помощью компаса курс фиксируется. При этом, даже если скорость корабля не контролируется, то он все равно не сбивается с курса! (Мы пренебрегаем сносом течением). Мы видим как жизненно важна локсодрома и определение угла, который составляет локсодрома с меридианами.

Конечно меридианы и параллели—локсодромы. Если точки А и Б имеют одинаковую долготу (широту), то надо держать курс на Север или на Юг (на Восток или на Запад). Как же быть если точки А и Б имеют разную долготу и разную широту?

А что если б можно было построить карту Земли в которой *все* локсодромы, не только меридианы и широты, прямые линии? Имея такую карту, капитан корабля с линейкой в руках одним движением карандаша, соединив точки А и Б отрезком прямой, определял бы угол и соответственно фиксировал бы курс корабля.

Сразу же отметим, что карты мира которые мы знаем с детства этим свойством обладают. Это заслуга Меркатора.

Давайте мы попробуем проделать эту работу.— Мы, вооруженные знанием некоторых формул математики XX века построим за Меркатора, то что он сделал в XVI–веке. И сделав это, он на самом деле заложил основание этих формул. Почти как у Мандельштама:

Быть может вместо губ
Уже родился шепот
И в бездревесии кружилися листы

1. Локсодромы на сфере—Логарифмические спирали—Прямые линии. Вычислителйный эксперимент

Пусть θ, φ—стандартные сферические координаты на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$: $x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta$. Метрика на сфере $R^2d\theta^2+R^2\sin^2\theta d\varphi^2$.

Если $\theta(t), \varphi(t)$ кривая, то косинус угла наклона $\alpha(t)$ к меридиану равен

$$\cos\alpha(t)=\frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2+\sin^2\theta(t)\varphi_t^2(t)}} \tag{1}$$

Кривая $\theta(t), \varphi(t)$—локсодрома если

$$\frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2+\sin^2\theta(t)\varphi_t^2(t)}}=constanta,\ \frac{\theta_t}{\varphi_t}=\pm\frac{c}{1-c^2}\sin\theta \tag{2}$$

Это дифференциальное уравнение локсодромы. Перейдя к параметру $t=\varphi$ ($\theta=\theta(\varphi)$ мы видим,что

$$\varphi(\theta)=k\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=k\log\tan\frac{\theta}{2}+\varphi_0 \tag{3}$$

В случае когда $\cos\alpha=0$,$\theta_t\equiv 0$,локсодрома—параллель $\theta=\theta_0$.

Функция $\tan\frac{\theta}{2}$ напоминает нам о стереографической проекции. И это верное наблюдение. При стереографической проекции сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ на плоскость $z=0$ каждая точка сферы $x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta$ переходит в точку $x=u, y=v, z=0$ такую, что эти две точки лежат на одной прямой с Северным полюсом, точкой $(0,0,1)$: точка с декартовыми координатами (x,y,z) на сфере переходит в точку с декартовыми координатами (u,v) на плоскости

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{1-z}{1},\ \text{то есть}\begin{cases}x=\frac{u}{1+u^2+v^2}\\ y=\frac{v}{1+u^2+v^2}\\ z=\frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}u=\frac{x}{1-z}\\ v=\frac{y}{1-z}\end{cases} \tag{4}$$

Стереографическая проекция (4) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между сферой (без северного полюса) и точками плоскости $z=0$[1]. Если r, φ полярные координаты на плоскости $z=0$,

[1]Замечание в сторону: Более того: стереографическая проекция (4) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками сферы (без северного полюса) с *рациональными* декартовыми координатами (x,y,z) и точками на плоскости $z=0$ с *рациональными* декартовыми координатами (u,v)—это бирациональное отображение. Причина проста. Если точка (x,y,z) при стереографической проекции переходит в точку (u,v),то точки $(0,0,1)$ (Северный полюс сферы), (x,y,z) и (u,v) лежат на одной прямой, и точки $(0,0,1)$ и (x,y,z) лежат на сфере $x^2+y^2+z^2=1$. Утверждение теперь немедленно следует из того факта, что корни квадратного уравнения с рациональными коэффициентами либо оба рациональные, либо оба иррациональные.

$r = \sqrt{u^2+v^2}$ $\varphi = \arctan\frac{u}{v}$ (то же что и на сфере), то получаем, что

$$\frac{r}{R\sin\theta} = \frac{R}{R(1-\cos\theta)},\ r = R\tan\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

При стереографической проекции точка с сферическими координатами (θ,φ) на сфере переходит в точку с плоскости $z=0$ с полярными координатами $(R\tan\frac{\theta}{2},\varphi)$. Значит, образом локсодромы (3) в стереографической проекции будет кривая на плоскости $z=0$, задаваемая уравнением

$$\varphi = k\log\frac{r}{R} + \varphi_0\,. \tag{6}$$

Это логарифмическая спираль. Немного позже мы объясним это явление качественно, используя азы конформной геометрии.

А теперь ровно один шаг до проекции Меркатора: Рассмотрим отображение $W = \log\frac{Z}{R}$ комплексной плоскости $Z = u+iv$ в комплексную плоскость $W = s+it$:

(7)

$$\text{if } Z = u+iv = \rho e^{i\varphi} \text{ then } W = \log\frac{Z}{R} = \log\frac{\rho}{R}+i\varphi,\ \text{i.e. } s = \log\frac{\rho}{R}, t=\varphi$$

Очевидно, что это отображение переводит образ локсодромы (6) в прямую. Композия стереографической проекции и функции $W = \log\frac{Z}{R}$

$$(\theta,\varphi)\mapsto R\tan\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\mapsto \log\tan\frac{\theta}{2}+i\varphi \tag{8}$$

отображает локсодрому $\varphi = k\log\tan\frac{\theta}{2}$ на сфере в прямую $t = ks$. В частности меридианы $\varphi=\varphi_0$ переходят в прямые $t=\varphi_0$ и параллели $\theta=\theta_0$ переходят в отрезки прямых $s=\log\tan\frac{\theta_0}{2}$.

Конечно, для того чтобы функция $W = \mathrm{Log}Z$ была бы определена на всей комплексной плоскости, нужно, например,отождествить в образе точки $\pm i\pi t$, то есть нужно полагать, что функция (7) принимает значения на цилиндре.

Подытожим наши вычисления. Мы показали, что отображение (8) отображает сферу с выколотыми полюсами на полосу $-\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2}$ с отождествленными краями (цилиндрическую поверхность); при этом все локсодромы, в том числе и меридианы, и параллели вереходят в прямые линии (винтовые линии). Это и есть карта Земли по Меркатору (без Арктики и Антарктики).

Теперь попробуем уяснить смысл этих вычислений.

2. Проекция Меркатора—конформное отображение. Качественный анализ.

В предыдущем разделе мы прямыми вычислениями, решив соответствующее дифференциальное уравнение, нашли локсодромы на сфере и увидели, что при стереографической проекции они превращаются в архимедовы спирали. Затем мы показали, что функция $\mathrm{Log} z$, отображая сферу на прямоуголйную полосу плоскости (более точно сферу без полюсов на цилиндрическую поверхность). Обсудим это явление качественно.

При проекции Меркатора сохраняются углы локсодром с меридианами, значит и сохраняются углы между локсодромами. Отсюда следует, что проекция Меркатора это конформное отображение: отображение сохраняет угол между любыми двумя векторами касательными к данной точке сферы

Стереографическая проекция сферы на плоскость, это тоже конформное отображение [2], при котором параллели переходят в концентрические окружности и меридианы переходят в лучи, исходящиеся из центра. Значит каждая локсодрома в стереографической проекции должна пересекать все лучи, исходящие из начала координат, под одним и тем же углом. Это условие, как раз и определяет архимедову спираль. Конформное отображение $\mathrm{Log} Z$ отображает лучи, исходящие из начала координат, в прямые параллельные вещественной прямой м локсодромы, составляющие угол α с меридианами в прямые (винтовые линии), составляющие угол α с вещественной прямой.

А теперь немного общих рассуждений. Мы тут все красиво объяснили, используя функцию комплексной переменной $\mathrm{Log} Z$. Все на самом деле было наоборот: отображение Меркатора, строившееся опытным путем и привело к понятию логарифма[3]! Трудно удержаться и не привести полностью гениальное стихотворение Мандельштама полностью:

И Шуберт на воде,
И Моцарт в птичьем гаме,
И Гете, свищущий на вьющейся тропе,
И Гамлет мысливший пугливыми шагами
Считали пульс толпы и верили толпе

Быть может раньше губ сперва родился шепот,
И в бездревесии кружилися листы,
И те кому мы посвящаем опыт
До опыта приобрели черты.
О.Мандельштам

Думается, что содержание этой заметки в той или иной степени должно входить в любой курс комплексного анализа.

2 февраля 2008 года О.М.Худавердян

[2]Метрика сферы в стереографических координатах имеет вид $\frac{du^2+dv^2}{(1+u^2+v^2)^{2?}}$

[3]меркаторовская контструкция вместе с понятием нетеровского логарифма стояло у истоков понятия логарифма???