Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

30 мая 2021 г.

Это конспект лекций на 15 апреля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a, \quad \left(x^i x^j = x^j x^i\,, x^i\theta^a = \theta^a x^i\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P \colon \sigma_P(f) = f(P)\,.$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. *Пусть D-область в $\mathbf{R}^m$, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в $\mathbf{R}$:*

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,.$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0, 1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0, 1)$ в $\mathbf{R}$. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s: $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0, 1)$. Действительно, если $s \notin (0, 1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x - s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x - s)\frac{1}{x - s}\right) = \sigma(x - s)\sigma\left(\frac{1}{x - s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x - s)\frac{1}{x - s}\right) = 1\,.$$

Противоречие, значит $s \in [0, 1]$.

Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0, 1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x - s)^2 + (g - t)^2\,.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ *не существует*). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. $\blacksquare$

Упражнение 1. *Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0, 1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0, 1)$.*

Упражнение 2. *Остснется ли верным утверждение, если алгебру гладких функций в $C^\infty([0, 1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые разделяют точки отрезка $[0, 1]$.*

Упражнение 3. *Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении*

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. $\blacksquare$

2 Отображения

Пусть снова $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 2. каждому отображению $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на $\mathbf{R}^m$ ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) гладкую функцию ма $\mathbf{R}^n$ ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. *Пусть U-область в $\mathbf{R}^m$ и V-область в $\mathbf{R}^n$, и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F\colon\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ такое, что*

$$\tau = F^*\,, \textit{то есть для любой функции } f \in C^\infty(D)\ \tau(f) = f(F(P))\,.$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

Докажем эту теорему.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2\colon\ \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \tag{1}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами $(x.y)$

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)\big|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2 \colon \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости $\mathbf{R}^2$ в функции на $\mathbf{R}$. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i.

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

`Указание к решению`

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——n различных простых

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$——— $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал ——- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$—————-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x)\,, \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}\,, \text{то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}\,, \tag{4}$$

Построим многочлен (4),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (**??**) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{5}$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i\neq m}(x - x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} , \qquad (6)$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i\not m}(x - x_i)}{\prod_{i\not m}(x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_3)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \qquad (7)$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i\neq m} p_i \left[\prod_{i\neq m} p_i \right]^{-1}_{mpdulop_m} \qquad (8)$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 \, [3 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{modulo2} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 \, [2 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{modulo3} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 \, [2 \cdot 3 \cdot 7]^{-1}_{modulo5} + a_4 2 \cdot 3 \cdot 5 \, [2 \cdot 3 \cdot 5]^{-1}_{modulo}$$

$$a_1 \cdot 105 \, [105] - 1_{modulo2} + a_2 70 \, [70]^{-1}_{modulo3} + a_3 42 \, [42]^{-1}_{modulo5} + a_4 30 \, [30]^{-1}_{modulo7} =$$

$$a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

$$105 a_1 + 70 a_2 + 126 a_3 + 120 a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегая вперед дадим определение в духе идей двойственности $---$:

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\xi^1, \ldots, \xi^q$ это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём.
Например вместо
$\mathbf{R}^p$ рассматривается алгебра гладких функций от $x^1, \dots, x^p$.
Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0\,, \tag{9}$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений [2]

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $= a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda)\,,$$

где $m(\lambda)$-обычное число и $n(\lambda)$-нильпотент.

Упражнение 4. *Назовём элемент алгебры Грассмана целым если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.*

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n, $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных $x^1, \dots, x^p$ и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1 \dots i_k}}$ являются гладкими функциями от переменных $x^1, \dots, x^p$: для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1 \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}\,.$$

[2] то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, mnogohlen P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i, образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Упражнение 5. *Как преобразуется функция* $g = \cos x$ *при замене координат* $x = x' + \varepsilon^1\varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0}.

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{\beta_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0}. Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z^a} g + (-1)^p (fg) f \frac{\partial g}{\partial z^a}\,. \tag{10}$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$.

Упражнение 6. *Показать, что*

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$$

Упражнение 7. *Пусть* $f(x, \theta)$*–элемент алгебры Березина, гладкая функция он* $, \theta$*. Написать формулу Тэйлора.*

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂:

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к выводу, что

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta \neq 0\,.$$

так как θ не является производной и мы выбираем нормировку

$$\int \theta d\theta = 1\,. \tag{11}$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \cdots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x^1,\ldots,x^r)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k}\,,$$

где $\{\theta^1,\ldots,\theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1,\ldots,x^s\}$ это стандартные координаты [3] в $\mathbf{R}^s$ и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1,\ldots,x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

[3]например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1,\ldots a^n) = a^i$, где $\mathbf{R}^r$ рассматривается как множество s-ок действительных чисел.

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. *Пусть $\{f^a(x,\theta)\}$, $a = 1,\dots p$ произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве p штук и пусть $\{\varphi^\alpha(x,\theta)\}$, $\alpha = 1,\dots q$ произвольный набор нечётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве q штук.*

Тогда существует гомоморфизм $\alpha\colon \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ такой, что

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x,\theta) \ (a = 1,\dots,p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x,\theta) \ (\mu = 1,\dots,p) \end{cases} \tag{12}$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ равно

$$\alpha\,[f] = \alpha \left[f = \sum_{0\le k\le q} a_{\mu_1\dots\mu_k}(y^1,\dots,y^p)\eta^{\mu_1}\dots\eta^{\mu_k} \right] = \alpha\,[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y)\eta^\nu\eta^\mu + \dots] =$$

$$a_\emptyset \left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}(x)\theta^\beta\theta^\alpha + \dots \right) +$$
$$+ a_{\mu\nu} \left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}\theta^\beta\theta^\alpha + \dots \right) \left[\Phi^\mu_\alpha(x)\theta^\alpha + \dots \right] \left[\Phi^\nu_\beta(x)\theta^\alpha + \dots \right] + \dots$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (12).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$-мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$, $i = 1,\dots,r$, $\alpha = 1,\dots,s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1,\dots,x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}\,.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x, \theta)\,,\, i = 1, \dots, s \end{cases} \tag{13}$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. *Произвольное преобразование переменных* (13) *обратимо если и только если выполняются следующие условия:*

- *отображение* $\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ *задаваемое формулами* (13)

$$x^{i'}\big|_{\theta=0} = f^{i'}(x, \theta)\big|_{\theta=0} \quad \textit{обратимо} \tag{14}$$

- $s \times s$*-матрица*

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}\big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{i'}(x, \theta)}{\partial \theta^j}\big|_{\theta=0} \tag{15}$$

  обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{gathered} x' = x + \theta^1\theta^2 \\ \theta^{1'} = \theta^1 + \sin x \theta^1\theta^2\theta^3 \\ \theta^{2'} = 2\theta^2 \\ \theta^{3'} = \theta^3 \end{gathered} \tag{16}$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'\big|_{\theta=0} = (x + \theta^1\theta^2)\big|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (14) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (15) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}\big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^3} \end{pmatrix}\big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 + \sin x\theta^2\theta^3 & 0 & 0 \\ 1 - \sin x\theta^1\theta^3 & 2 & 0 \\ 1 + \sin x\theta^1\theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\big|_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (16) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \to \theta$, $\theta^2 \to \eta$, $\theta^3 \to \xi$. Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin x\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \sin x\theta\eta\xi\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \frac{1}{2}x^3\theta'\eta'\xi'\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'$$

и

$$x = x' - \theta\eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = x' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ координаты афинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x,\theta) = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p)\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x)a_i(x) + \dots + \theta^1 \dots \theta^n a_{[1\dots n]}(x) \quad (17)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x:

$$\lim_{x\to\infty} x^n D^m f = 0\,.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta)\theta^1 \dots \theta^n a_{[1\dots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \dots dx^n a_{[1\dots n]}(x) = \quad (18)$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (17)

Упражнение 8. *Проверить, что это определение согласовано с формулой* (11)

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α), $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на афинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\Big|_{\theta=0} > 0 \tag{19}$$

Вычислим интеграл (18) от одной и той же быстроубывающей функции $F(x, \theta)$ в двух различных системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') f\left(x\left(x',\theta'\right), \theta\left(x',\theta'\right)\right) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\left(x,\theta\right)}{\partial\left(x',\theta'\right)}\right) D(x',\theta') f'(x',\theta') \tag{20}$$

Мы вычислим Березиниан на следующей лекции.

3.6.1 Два интеграла

Пусть $|||A_{ik}|$ положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица в Евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Вычислить интеграл по $\mathbf{E}^n$ от $e^{-A_{ik}x^i x^k}$.

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Вычислить интеграл от функции $e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}$ по $\mathbf{R}^{0|q}$.:

4 Березиниан (продолжение)

лекция 15 марта

Вернёмся снова к уравнению (20) и обсудим березиниан.

Определение 9. Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{21}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, then

$$\mathrm{Ber} M = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det\left(A - \beta D^{-1}\Gamma\right)}{\det D}\,. \tag{22}$$

Замечание 11. Вы спросите, а в каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве $\mathbf{R}^m$— в пространстве упорядоченных n-ок действителйнух чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует *в множестве Λ-точек пространства* $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана Λ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$\mathbf{R}_\Lambda^{p|q} = \{(\lambda_1, \dots \lambda_p; \mu_1, \dots \mu_q), \lambda_i \in \Lambda_0, \mu_j \in \Lambda_1\} \tag{23}$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Оказывается, березиниан (22) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали в конце прошлой лекции. Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели понятие интеграла от быстроубывающей функции $f(x,\theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^{p|q})$ по всему пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Затем мы рассмотрели две произвольные системы координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$ и,руководствуяс правилом (18), и инвариантностью интеграла по отношению к замене координат мы приходим к правилу

Теорема 5. *При замене координат* $\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x,\theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^{\alpha''}(x,\theta) \end{cases}$ *в интеграле* $\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta)$ *подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:*

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') f(x,\theta)\big|_{x(x',\theta'),\theta(x',\theta')},$$

где

$$\frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} = Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\,(x',\theta')}\right) = Ber\begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',\theta')}{\partial x'} & \frac{\partial \theta(x',\theta')}{\partial x'} \\ \frac{\partial x(x',\theta')}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta(x',\theta')}{\partial \theta'} \end{pmatrix} = Ber\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

где

$$A^i_{j'} = \frac{\partial x^i(x',\theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \beta^\alpha_{j'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x',\theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \gamma^i_{\alpha'} = \frac{\partial x^i(x',\theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],, \quad D^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x',\theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],,$$

Условие (15) *теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.*

Замечание 12. Интеграл (20) посчитан в предположении

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\big|_{\theta=0} > 0 \tag{24}$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (24).

Замечание 13. Вы можете часто увидеть НЕПРАВИЛЬНОЕ обозначение для координатной формы объёма

Следствие 1. *Березиниан мультипликативен:* $Ber(M_1M_2) = BerM_1 \cdot BerM_2$.

`Proof`

$$Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right) = \frac{D(x,\theta)}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')}\frac{D(x',\theta')}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\,(x',\theta')}\right) Ber\left(\frac{\partial\,(x',\theta')}{\partial\left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right) \tag{25}$$

Мультипликативность практически следует из определения!

Пример 4.1. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{1|1}$ 'линейное' преобразование

$$\varphi_M\colon \quad \begin{cases} x = x'a + \theta'\gamma \\ \theta = x'\beta + \theta k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \big(x,\theta\big) = \big(x', theta'\big)\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{26}$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{27}$$

Замечание 14. Матрица Якоби преобразования (26) равна матрице (27).

Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле 26. Это объясняется тем, что производная берется слева (см. также замечание 10)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $f(x,\theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$ в координатах (x,θ) и в новых координатах (x',θ'). В координатах (x,θ)

$$\int D(x,\theta) f(x,\theta) = I,\ \left(I = \int f_1(x)dx\right).$$

В координатах (x',θ') имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right)$$

(Мы положили, что $\mathrm{Ber}M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a > 0)\,. \tag{28}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax,\theta\right) =$$

$$\mathrm{Ber}M \int D(x',\theta')\left[f_0(ax) + \theta f_1(ax)\right] = \mathrm{Ber}M \int f_1(\tilde{x})d\tilde{x} = \frac{\mathrm{Ber}M}{|a|} I \Rightarrow \mathrm{Ber}M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\,.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{29}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(x, k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') \left[f_0(x) + k\theta' f_1(x)\right] = \mathrm{Ber} M \int f_1(x) dx = kI \Rightarrow \mathrm{Ber} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\,.$$

Теперь перейдём к общему случаю:

c)

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{30}$$

Имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta) f\left(ax - \gamma\theta, \beta x + k\theta\right)\,.$$

(мы положим $a > 0$) Продолжим вычисления:

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right],.$$

Заметим, что $\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) = 0$,так как $f_0(x)$ быстроубывающая функция:

$$\int D(x',\theta') f_0(ax' - \gamma\theta') = -\frac{1}{a}\int \gamma f'(x) dx = 0\,,$$

значит

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right] = \mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta)\left[g(ax) - \gamma\theta g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta)\theta k g(ax) - \int D(x,\theta)\theta\beta x\gamma g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a}\int g(x) dx - \frac{\beta\gamma}{a^2}\int x g'(x) dx\right] = \mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a}\int g(x) dx + \frac{\beta\gamma}{a^2}\int g(x) dx\right] =$$

$$I\mathrm{Ber}M\left[\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}\right]\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix}a & \beta\\ \gamma & k\end{pmatrix}=\frac{1}{\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}}=\frac{a^2}{ka+\beta\gamma}=\frac{a}{k}\left(1-\frac{\beta\gamma}{ka}\right).$$

Exercises

Мы посчитаем интегралы 3.6.1, потом мы сделаем упражнение, где проясим смысл условия быстроубывающей функции для интеграла Березина.

Exercise

Приведя форму к диагональному виду легко понять, что

$$\int e^{-A(\mathbf{x},\mathbf{x})}d^nx=\int e^{-\lambda_1x_1^2-\dots-\lambda_nx_n^2}d^nx=\prod_{i=1}^n\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Во втором интеграле детерминант перепрыгнет в числитель[4].

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx==C\sqrt{\det B}=C\mathrm{Pfaffian}B$$

(это для чётных n, а для нечётных нуль.) Это можно увидеть прямым подсчётом: при $n=2k$

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)\frac{1}{k!}\left(B_{ij}\theta^i\theta^j\right)^k=$$

$$\frac{1}{k!}B_{i_1j_1}\dots B_{i_kj_k}\varepsilon^{i_1j_1\dots i_kj_k}$$

а можно и косвенно: если обозначить

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})$$

то заменой переменной $\theta^i=L^i_k\xi^k$ легко увидеть. что

$$F(B)=\frac{F(L^+BL)}{\det L}$$

hence

$$\frac{F(\tilde{B})}{\sqrt{\tilde{B}}}\frac{F(B)}{\sqrt{B}},(\tilde{B}=L^+BL)$$

то есть

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})=C\sqrt{B}$$

[4]this integral appeared in Faddeev Popov quantisation. This was not supersymmetry, however this was a good push for it.

Замечание 15. Я не знаю более эффективного способа проверить формулу для Пфаффиана.

Пусть f гладкая быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{1|2}$. Определим интеграл от этой функции по лучу $(0, \infty)$:

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) \tag{31}$$

Покажем, что этот интеграл инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases}$$

Березиниан той замены равен 1 (Проверьте это!)

Посчитаем его в новых и старых координатах.

a) в координатах (x, θ, φ)

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) \left[f_0(x) + \theta f_1(x) + \varphi f_2(x) + \theta\varphi f_3(x) \right] = \int dx f_3(x)\,.$$

b) в координатах (y, ξ, η)

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \mathrm{Ber} \frac{\partial(x, \theta, \varphi)}{\partial(y, \xi, \eta)} \left[H(x) f(x, \theta, \varphi) \right]_{x = y + \xi\eta, \theta = \xi, \varphi = \eta} =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} 1 \cdot H(y + \xi\eta) \left[f_0(y + \xi\eta) + \xi f_1(y + \xi\eta) + \eta f_2(y + \xi\eta) + \xi\eta f_3(y + \xi\eta) \right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \left(H(y) + \xi\eta\delta(y) \right) \left[f_0(y) + \xi\eta f_0'(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y) \right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \left(H(y) + \xi\eta\delta(y) \right) \left[f_0(y) + \xi\eta f_0'(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y) \right] =$$

$$\int dy H(y) \left[f_0'(y) + f_3(y) \right] + \int dy \delta(y) f_0(y) =$$

$$\int_0^\infty dy \left[f_0'(y) + f_3(y) \right] + f_0(0) =$$

$$f_0(\infty) - f_0 + \int_0^\infty dy f_3(y) + f_0(0) = \int_0^\infty dy f_3(y) \;\blacksquare$$

Упражнение 9. *Проверьте,пожалуйста, что это нехорошее определение интеграла вдоль луча.*

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi)f(x,\theta.\varphi) = \int_0^\infty dx \int_{\mathbf{R}^{0|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)f(x,\theta,\varphi)$$

Сравните с (31)

4.1 О некоторых свойствах Березиниана

Эта лекция основана на статье Khudaverdian, Voronov *Berezinians, Exterior Powers and Recurrent sequences*, LMP(2005), **74**, pp. 201–228

4.1.1 Детерминант

Детерминант и площадь параллелограмма

Упражнение 10. *Объяснить связь между площадью параллелограма и и детерминантом линейного оператора в* V^2.

Упражнение 11. *Пусть* ω n*-форма в* n*-мерном линейном пространстве,*
А что это такое?
пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ *базис в* V *и пусть линейный оператор на* V.
Вычислить

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)}$$

Легко увидеть, что для невырожденной формы

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} = \det A\,, \tag{32}$$

или если угодно для любого линейного оператора $: V \to V$,*для любой* полилинейной n-формы и *любых* n *векторов* $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ этого пространства

$$\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n) = \det A\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\,, \tag{33}$$

Из соотношения (32) вытекает мультипликативность детерминанта.

Действительно рассмотрим произвольный базис $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ n-мерного линейного пространства V. Пусть B невырожденнык линейный оператор в V. Тогда система векторов $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n\}$, где $\mathbf{f}_i = B(\mathbf{e}_i)$ тоже будет базисом. Тогда из равенства (32) следует, что

$$\det(A\cdot B) = \frac{\omega\,(AB\mathbf{e}_1,\dots,AB\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} = \frac{\omega\,(AB\mathbf{e}_1,\dots,AB\mathbf{e}_n)}{\omega(B\mathbf{e}_1,\dots,B\mathbf{e}_n)}\cdot\frac{\omega\,(B\mathbf{e}_1,\dots,B\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} =$$

$$\frac{\omega\left(A\mathbf{f}_1,\ldots,A\mathbf{f}_n\right)}{\omega(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)}\cdot\frac{\omega\left(B\mathbf{e}_1,\ldots,B\mathbf{e}_n\right)}{\omega(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)}=\det A\cdot\det B$$

Сравните,пожалуйста, этот вывод свойства мультипликативности детерминанта с выводом (32).

4.1.2 След и детерминант

$$\det(1+\varepsilon A)=1+\varepsilon\mathrm{Tr}\,A\,.$$

Формула Лиувилля:

$$\det e^{A}=e^{\mathrm{Tr}\,A}\,.$$

Упражнение 12. *Пусть A матрица линейного оператора.*
Перейдем в базис в котором она диагональна.
В этом базисе утверждение легко проверить. (Проверьте!)
Значит оно верно всегда.

Упражнение 13. *Сделать предыдыщее доказательство полным.*

Замечание 16. Решение

Множество *диагонализируемых матриц* всюду плотно в мнозестве всех матриц. Поэтому если функции и B непрерывны утверждение, что $A=B$ по непрерывности может быть продолжено на множество всех матриц, если оно верно на множестве диагонализируемых матриц,

Упражнение 14. *Второе доказательство:*
Напишем

$$B(t)=\det e^{tA},\quad ,D(t)=e^{t\mathrm{Tr}\,A}\,.$$

Мы видим, что обе функции $B(t)$ и $D(t)$ удивлетворяют одному и тому дифференциальному уравнению и одним и тем же граничным условиям.

решите задачку

Упражнение 15. *Если Вас не убедит предыдущее рассуждение*
посчитате $\frac{d}{dt}\left(\frac{B(t)}{D(t)}\right)$.

Четвертое 'доказательство':

Упражнение 16.

$$\det e^{A}=\det\left(\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{A}{N}\right)^{N}\right)=\left(\lim_{N\to\infty}\left(e^{\mathrm{Tr}\,\frac{A}{N}}\right)^{N}\right)=e^{\mathrm{Tr}\,A}\,.$$

4.1.3 supertrace of the supermatrix

Мы попробуем определить след матрицы, так чтобы не нарушать теорему Лиувилля. Мы рассмотрим матрицы бесконечно близкие к 1. Рассмотрим чётную $p|q\times p|q$ чётную матрицу $M=\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & D\end{pmatrix}$,

- A это $p\times p$ матрица все коэффициенты которой чётные числа,
- B это $p\times q$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- Γ это $q\times p$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- D это $q\times q$ чётная матрица, то есть все коэффициенты её чётные элементы алгебры Грассманна,

$$e^{\mathrm{sTr}\,(\varepsilon M)}=1+\varepsilon\mathrm{sTr}\,M=1+\mathrm{sTr}\,\varepsilon\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & D\end{pmatrix}=$$

С другой стороны:

$$\mathrm{Ber}e^{\varepsilon M}=\mathrm{Ber}\left(e^{\varepsilon\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & D\end{pmatrix}}\right)=\mathrm{Ber}\left(1+\varepsilon\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & D\end{pmatrix}\right)=$$

$$\mathrm{Ber}\left(\begin{pmatrix}1+\varepsilon A & \varepsilon B\\ \varepsilon\Gamma & 1+\varepsilon D\end{pmatrix}\right)=\frac{\det(1+\varepsilon A)-\det\left(\varepsilon B(1+\varepsilon D)^{-1}\varepsilon\Gamma\right)}{\det(1+\varepsilon D)}=$$

$$=\frac{\det(1+\varepsilon A)}{\det(1+\varepsilon D)}=\frac{1+\varepsilon\mathrm{Tr}\,A}{1+\varepsilon\mathrm{Tr}\,D}=1+\varepsilon(\mathrm{Tr}\,A-\mathrm{Tr}\,D)\,.$$

Comparing these formulae we come to

$$\mathrm{sTr}\,\varepsilon\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & D\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\,A-\mathrm{Tr}\,D\,.$$

4.2 Expansions of the function $R_A(z)=\mathbf{Ber}(1+Az)$

We will consider the expansions for the function $R_A(z)$.

Пример 4.2. Пусть A оператор в трахмерном линейном пространстве. Тогда

$$\mathrm{Ber}(1+zA)=\det(1+zA)=1+z\mathrm{Tr}\,A+z^2\mathrm{Tr}\,(A\wedge A)+z^3\mathrm{Tr}\,(A\wedge A\wedge A)$$

и

$$\det A=+\mathrm{Tr}\,(A\wedge A\wedge A\wedge A)$$

Что это такое???

4.2.1 Действие $\underbrace{A\wedge\cdots\wedge A}_{k\ \text{раз}}$ на $\underbrace{V\wedge\cdots\wedge V}_{k\ \text{раз}}$

Пусть линейный оператор действует на V.

Действие $A\wedge A$ на $V\wedge V$ определяется

$$(A\wedge A)(u\wedge v)=A(u)\wedge A(v).$$

При этом

$$u\wedge v=-v\wedge u(-1)^{p(u)p(v)}\,.$$

Посчитаем действие $A\wedge A$ на $V\wedge V$ Ограничимся случаем, когда диагонализируем. (см. замечание 16)

Пусть $\{\mathbf{e}_i,\mathbf{f}_\alpha\}$ базис $p|q$-мерного суперпорстранства V, состоящий из собственных векторов. Имеем p чётных собственных векторов

$$A(\mathbf{e}_i)=\lambda_i\mathbf{e}_i\,,\quad i=1\ldots,p$$

и q нечётных собственных векторов

$$A(\mathbf{f}_\alpha)=\mu_\alpha\mathbf{f}_\alpha\,,\quad \alpha=1\ldots,q\,.$$

Рассмотрим базис пространства $V\wedge V$:

чётные вектора – $\{\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j,(i<j);\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta(\alpha\le\beta)\}$в количестве $\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}$ штук

нечётные вектора – $\{\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{f}_\alpha\}$в количестве pq штук,

Имеем

$$A\wedge A(\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j)=\lambda_i\lambda_j\,, A\wedge A(\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta)=\mu_\alpha\mu_\beta\,,$$

соответственно для нечётных векторов

$$A\wedge A(\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{f}_\alpha)=\lambda_i\mu_\alpha\,,$$

размерность пространства $V\wedge V$ равна $\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}|pq$, и соответственно

$$\mathrm{sTr}\ (A\wedge A)=\sum_{i<j\le p}\lambda_i\lambda_j+\sum_{\alpha\le\beta\le q}\mu_\alpha\lambda_\beta-\sum\lambda_i\mu_\alpha\,.$$

-

В следующий понедельник мы начнём с того, что покажем, как устроено разложение:

$$\mathrm{Ber}(1+zA)=1+z\mathrm{sTr}\ A+z^2\mathrm{sTr}\ (A\wedge A)+\ldots$$

Лекция 29 марта

`Эта лекция какбы провалилась: по неизвестной причине отказал 'stylos' мы лишились возможности записывать... Я постарался более подробный file выложить на домашней страничке.`

Предложение 1.

$$Ber(1+Az) = 1 + c_1(A)z + c_2(A)z^2 + \cdots = c_k(A)z^k$$

where $c_k(A) = \mathrm{sTr}\ (\underbrace{A \wedge \cdots \wedge A}_{k\ \text{раз}})$

Упражнение 17. *Пусть L оператор в в трёмерном простраанстве Показать, что*

$$\det(1+zL) = 1 + z\mathrm{Tr}\, L + z^2 \mathrm{Tr}\,(L \wedge L) + z^3 \mathrm{Tr}\,(L \wedge L \wedge L)\,,$$

показать, что

$$\det L = \mathrm{Tr}\,(L \wedge L \wedge L)\,,$$

Перепишем разложение в предложении 4.2.1:

$$\mathrm{Ber}(1+zA) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(A)z^k, \qquad \text{где} \begin{cases} c_k(A) = \mathrm{sTr}\ \Lambda^k A & \text{для целых } k \geq 0 \\ c_k(A) = 0 & \text{для целых } k < 0 \end{cases}$$

Замечание 17. Тут выписано разложение в ряд Тейлора. Немного странное записывание закона суммирования оправдается в Теореме 6

`Proof`

$$\mathrm{Ber}(1+zA) = \prod_{i=1}^{p}(1+z\lambda_i)\prod_{\alpha=1}^{q}(1+z\mu_\alpha)^{-1} = \tag{34}$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\mu_1^{n_1}\ldots\mu_q^{n_q}(-1)^{n_1+\cdots+n_q}z^{r+n_1+\cdots+n_q} = \tag{35}$$

$$1 + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p - \mu_1 - \cdots - \mu_q)z + \left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j - \sum_{i=1,\alpha=1}^{i=p,\alpha=q}\lambda_i\mu_\alpha + \sum \mu_\alpha\mu_\beta\right)z^2 + \cdots =$$

$$1 + z\mathrm{sTr}\ A + z^2\mathrm{sTr}\ (A\wedge A) + \ldots$$

$$\sum c_k(A)z^k\,, \text{где} c_k(A) = \mathrm{sTr}\ ((\wedge^k A)\,. \blacksquare \tag{36}$$

Обсудить

Упражнение 18. *Выразить базис в $V \wedge V \wedge V$ через базис в V.*

`Решение` Пусть V -линейное $p|q$-мерное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$, где вектора $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$—чётные вектора, и вектора $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q$—нечётные вектора- произвольный базис в V. Тогда,например,

будет базисом в $V \wedge V \wedge V$.

Конечно, количество чётных векторов в базисе минус количество нечётных, это супер-след единичного оператора (см, вычисления ниже). Тут мы еще ответим на вопрос, а каковы другие базисы в V.

Предложение 2. *Пусть* $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$*-произвольный базис в* V*, и пусть* $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, f_{q'}\}$ *произвольный набор* p *чётных и* q *нечётных векторов* V*, Рассмотрим матрицу перехода* T*:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{i'} = T^i_{i'} \mathbf{e}_i + T^\alpha_{i'} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_{\alpha'} = T^i_{\alpha'} \mathbf{e}_i + T^\alpha_{\alpha'} \mathbf{f}_\alpha \end{cases},$$

где $||T^i_{i'}||, ||T^a_{\alpha'}||$*-чётные матрицы (все их элементы чётные) и* $||T^\alpha_{i'}||, ||T^i_{\alpha'}||$*-нечётные матрицы (все элементы нечётные)*

$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, f_{q'}\}$*—базис если и только если матрица обратима, то есть матрицы* $||T^i_{i'}||$ *и* $||T^a_{\alpha'}||$*-обратимы.*

Упражнение 19. *Обсудить вычисление* $Ber(1 + zA)$ *до третьего порядка по* z*.*

Упражнение 20. *Пусть* E *единичный оператор в* $p|q$*-мерном линейном пространстве. Вычислить*

$\mathrm{sTr}\ E$

$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E)$

$Ber(E + zE)$

Замечание 18. Иногда мы будем путать обозначение для следа матрицы и для суперследа.

Решение.

Мы видим, что $\mathrm{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q}$. Раскладывая в ряд получим:

$$\mathrm{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q} = 1 + (p - q)z + \dots,$$

$$\mathrm{sTr}\ E = p - q,$$

$$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E) = \frac{(p-q)(p-q-1)}{2},$$

$$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E \wedge E) = \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6},$$

и так далее. Проверим эти формулы.

Пусть $\{\mathbf{e}_i, f_\alpha\}$ произвольный базис в V,

Мы видим, что

суперслед $=$ количество чётных элементов в базисе в $V-$количество нечётных элементов в базис

теперь проверим суперслед квадрата:

рассмотрим базис в $V \wedge V$: это будет например

$$\left\{ \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)_{\text{чётные вектора}}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha; \}_{\text{нечётные вектора}} \right\}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } E\wedge E = \text{количество чётных элементов в базисе} -$$

$$\text{количество нечётных элементов в базисе } = \frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}-pq=\frac{(p-q)(p-q-1)}{2}\,,$$

теперь проверим суперслед куба:

рассмотрим базис в $V\wedge V\wedge V$: это будет например

$$\Big\{\{\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k (i<j<k);\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta(\alpha\leq\beta)\}_{\text{чётные вектора}},\{\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta\wedge\mathbf{f}_\gamma(\alpha\leq\beta\leq\gamma);\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{f}_\alpha\}_{\text{н}}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } E\wedge E\wedge E = \text{количество чётных элементов в базисе в } V\wedge V\wedge V -$$

$$\text{количество нечётных элементов в базисе в } V\wedge V\wedge V = \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{6}+\frac{pq(q+1)}{2}\right]-\left[\frac{q(q+1)(1+2)}{6}+\frac{p(p-1)q}{2}\right]=\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6}\,,$$

Проверка последнего равенства несколько утомительна...

(Сравните результаты этих упражнений с результатами упражнений по вычислению примеров базисов в $V\wedge V$ и в $V\wedge V\wedge V$.)

4.2.2 Универсальные полиномы Ньютона

Воспользуемся теоремой+тождеством Лиувилля: Обозначим $s_k = \mathrm{sTr}\, A^k$. Имеем

$$\mathrm{Ber}(1+zA)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{sTr}\,\underbrace{A\wedge\dots\wedge A}_{k\text{ раз}}z^k = e^{\mathrm{sTr}\,\log(1+zA)}=e^{\mathrm{sTr}\,\left(\sum_{k=1}^\infty A^k(-1)^{k+1}z^k\right)}=$$

$$e^{\left(\sum_{k=1}^\infty s_k(-1)^{k+1}z^k\right)}=e^{\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)}=$$

$$1+\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)^2+\frac{1}{6}\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)^3+\dots=$$

$$1+s_1z+\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)z^2+\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)z^3+\dots$$

Из этого предложения и формулы Лиувилля следует

Предложение 3.

$$c_k(A)=P_k(s_1,\dots,s_k)$$

$$c_0=1\,,\quad c_1=s_1,\quad c_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)\quad c_3=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)\,,$$

Замечание 19. В предложении при классические полиномы Ньютона очень важна их универсальность.

(и sTr можно заменить на Tr)

4.3 Возвращение к березинианам

Мы ещё раз вернёмся к предложению 4.2.1.

Упражнение 21. *Пусть L оператор в n-мерном линейном пространстве.*

Рассмотреть многочлен $\det(1+zL)$ *'разложив' его в окрестности нуля и бесконечности. Сравнив полученные выражения придём к формулам*

$$\underbrace{L\wedge\cdots\wedge L}_{k\ \text{раз}} = \det L\,\underbrace{L^{-1}\wedge\cdots\wedge L^{-1}}_{N-k\ \text{раз}}, \dim V = N\,.$$

Обсудим, что за ними стоит. Немного теории.

Пусть задано представление $\rho()$ группы обратимых операторов в линейном пространстве V. Контргредиентное представление определяется как представление $\mapsto \rho(A^{-1})$

Левая часть формулы, это след представления

$\underbrace{\rho\wedge\cdots\wedge\rho}_{k\ \text{раз}}$ группы. Правая часть есть след представления

$\det\rho\,\underbrace{\rho^*\wedge\cdots\wedge\rho^*}_{N-k\ \text{раз}}$, где $\rho^*: GL(V^*)\to GL(V^*)$ контрагредиентное представление:

$$\rho^*(A) = \left(\rho(A^{-1})\right)^*$$

Отметим, что если $A\colon V\to V$ и $B\colon V\to V$ то * и B^* и $^{-1}$ и B^{-1} отображают в "другую сторону а $(A^{-1})^*$ в ту же:

$$(AB)^* = B^*A^*, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{а} \quad \left((AB)^{-1}\right) = \left((A)^{-1}\right)\cdot\left((B)^{-1}\right)\,.$$

На матричном уровне это обратная транспонированная матрица. Поэтому за тождеством философски стоит *естественный изоморфизм*

$$\underbrace{V\wedge\cdots\wedge V}_{k\ \text{раз}} = \underbrace{\det V\otimes V\wedge\cdots\wedge V}_{k\ \text{раз}}$$

Это и есть естественная версия звёздочки Ходжа.

Упражнение 22. *Рассмотрим матрицу* $= \begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix}$ *Вычислить собственные значения этой матрицы.*

`Решение`

Пусть эта матрица имеет λ в качестве чётного (бозонного) собственного значения и пусть эта матрица имеет μ в качестве нечечётного (фермионного) собственного значения. Тогда $\mathrm{sTr}\ M = a - d = \lambda-\mu$ и

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+\beta\gamma & ...\\ ... & d^2+\gamma\beta\end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{cases}\text{sTr } M = \lambda - \mu = a - d \text{sTr } M^2 = \lambda^2 - \mu^2 = a - d + 2\beta\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\\ \mu = d + \frac{\beta\gamma}{a-d}\end{cases}$$

А что делать если $a = d$?

4.4 Об одной проблеме стандартной формулы о березиниане

Почему мы пошли эттим путем? Ведь у нас уже была формула для березиниана? Напомним (см. определение 9):

Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{37}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, тогда

$$\text{Ber} M = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det\left(A - \beta D^{-1}\Gamma\right)}{\det D}\,. \tag{38}$$

Попробуем воспользовавшись стандартной формулой для березиниана посчитать нашу рациональную функцию

$$R_M(z) = \text{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right)$$

Подробные вычисления показывают, что в итоге получается:

$$R_M(z) = \text{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \frac{\text{полином степени } p + pq \text{ по } z}{\text{полином степени } q + pq \text{ по } z}$$

а с другой стороны мы знаем и исследуем формулу (34) в которой

$$R_M(z) = \text{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \frac{\text{полином степени } p \text{ по } z}{\text{полином степени } q \text{ по } z}$$

Формула Березина приводит к сокращению числителя и знаменателя на многочлен степени pq!

Уже в простом случае $p = q = 1$ формула Березина даёт ответ:

$$R_M(z) = \text{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \text{Ber}\begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz}$$

Кажется, что в этой формуле имеем дело с отношением квадратичных полиномов по z, а нет , используя результаты упражнения 22 легко получить, что

$$\text{Ber}\begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz} = \frac{1 + \lambda z}{1 + \mu z} = \frac{1 + z\left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\right)}{1 + z\left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\right)}\,.$$

4.5 Возвращение к формуле $R_A(z) = \mathbf{Ber}(1 + Az)$

Функция $\mathrm{Ber}(1 + zA)$ можно разложить не только в в окрестноsти нуля, но и в окрестности другой точки, например, бесконечности[5]

Предложение 4.

$$Ber(1 + zA) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k^*(A)z^k, \qquad \textit{где} \begin{cases} c_k^*(A) = BerA\mathrm{Tr}\,\Lambda^{p-q-k}A^{-1} & \textit{для целых } k \leq p-q \\ c_k^*(A) = 0 & \textit{для целых } k > p-q \end{cases}$$

`Proof` На основаниии первого предложения получаем

$$\mathrm{Ber}(1 + zA) = \mathrm{Ber}(zA)\mathrm{Ber}\left(1 + \frac{1}{z}A^{-1}\right) = \mathrm{Ber}Az^{p-q}\sum_{i\in\mathbf{Z}}\frac{1}{z^i}c_i(A^{-1}) =$$

$$\mathrm{Ber}A\left(1 + \frac{1}{z}\mathrm{Tr}\,A^{-1} + \frac{1}{z^2}\mathrm{Tr}\,\left(A^{-1}\wedge A^{-1}\right) + \frac{1}{z^3}\mathrm{Tr}\,\left(A^{-1}\wedge A^{-1}\wedge A^{-1}\right) + \dots\right)$$

$$\sum_{k\leq p-q}\overbrace{\mathrm{Ber}Ac_{p-q-k}(A^{-1})}^{c_k^*}z^k = \sum c_k^*(A)z^k\,,$$

где

$$c_k^*(A) = \begin{cases}\mathrm{Ber}Ac_{p-q-k}(A^{-1})\text{if } k = p-q, p-q-1, \dots \\ 0 \quad \text{if } k > p-q\end{cases}$$

Что можно сказать о последовательностях $\{c_k\}$ и $\{c_k^*\}$?

Оказывается, изучая эти последовательности мы попадаем в мир возвратнух последовательностей; более удивительно, что изучая этот мир мы пишем новые формулы для березиниана.

Мы приходим к теореме, что

Теорема 6. *Для линейного оператора, действующего в $(p|q)$-мерном суперпространстве разница последовательностей c_k (см. Предложение 1) и c_k^* (см. Предложение 2)*

$$\gamma_k = c_k - c_k^*$$

есть возвратная последовательность периода q.

Эта теорема позволяет написать другую формулу для березиниана:

Мы не будем доказывать этой вообшем-то элементарной теоремы, но разберём примеры

[5]Интересно, что получиться если это сделать в другой, не бесконечно удалённой точке...

Пример 4.3. Пусть L линейный оператор в $p|q$-мерном суперпространстве и $q = 1$.

$$\mathrm{Ber}(1+zL) = \frac{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p}{1+\mu z} = \sum c_k(L) z^k$$

Мы видим, что при больших (например начиная с c_p последовательность становится геометрической[6] В этом проявляется фернионная размерность!,

Упражнение 23. *Написать разложение функции $\frac{1}{1-z}$ в нуле и в бесконечности ,*

Упражнение 24. *Написать разложение функции $\frac{z^2}{z^2-z-1}$ в нуле и в бесконечности*

Решение

Разложение в нуле

$$\frac{z^2}{z^2-z-1} = \sum_{k\geq 2} c_k z^k, \quad \begin{cases} a_k = c_{k-2} - c_{k-1} - c_k \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}\,, \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Разложение в бесконечности. Как бы та же формула, но другие граничные условия

$$\frac{z^2}{z^2-z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots = \sum_{\leq 0} c_k^* z^k\,,$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}\,, \\ c_0 = 1, c_{-1} = 1 \end{cases}$$

мы видим, что

$$\gamma_n = c_n - c_n^* = 1$$

то есть теорема подтверждается.

Пусть L оператор, такой, что

$$\mathrm{Ber}(1+zL) = \frac{1+z+z^2}{1+z-z^2}$$

Что можно сказать об операторе L. Например, можно ли сказать, что $\mathrm{Ber}L = -1$? А чему равен суперслед L.?

Решение

Сравнивя с формулой (34) получим

$$\mathrm{Ber}L = \frac{\prod \lambda_i}{\prod_\alpha \mu} = \frac{1}{-1} = -1\,.$$

[6].

4.6 Теорема 6 и вычисления березинианов

Используя теорему (6) мозно с лёгкостью посчитать березиниан так как

$$\mathrm{Ber} A = c^*_{p-q}$$

Для этого нужно уметь распознавать возвратную последовательность. Как?

Вспомним школьное упражнение

Предложение 5. *Последовательность $\{c_k\}$ геометрическая если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{pmatrix} = 0$$

А теперь почти школьное упражнение

Предложение 6. *Последовательность $\{c_k\}$ возвратная последовательность периода q если и только если соответствующие детерминанты Ганкеля зануляются, Например, последовательность $\{c_k\}$ возвратная периода 2 (как Фибиначчи) если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \end{pmatrix} = 0$$

и.т.д.

При помощи Ганкелей и использованием определителей посчитаем березинианы матриц в $p|q$-мерных пространствах

$q = 1$

Пример 4.4. Пусть действует в $p|1$-мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \le p-1} c^*_k z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + \mu z} = \sum_{k \ge 0} c_k z^k$$

и

$$\gamma_k = c_k - c^*_k --- \text{геометрическая прогрессия}$$

Значит

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_p & c_{p+1} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-1} - \mathrm{Ber} A & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|1$

$$\mathrm{Ber} A = \frac{1}{c_{p-1}} \det \begin{pmatrix} c_{p-1} & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix}$$

Пример 4.5. Пусть действует в $p|2$-мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k\leq p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1+pz+qz^2} = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$$

Рассмотрим частный случай, когда многочлен в знаменателе имеет вид $1+z+z^2$,то есть $c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$ (начиная с некоторого номера), Имеем для

$$\gamma_k = c_k - c_k^* - - - \text{геометрическая прогрессия}$$

поаследовательность a la Fibonacchi, то есть

$$0 = \det \begin{pmatrix} \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \gamma_{p+1} \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-2} - \mathrm{Ber}A & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|2$ типа Fibonacchi

$$\mathrm{Ber}A = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}} \det \begin{pmatrix} c_{p-2} & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}$$

На самом деле используя хорошую математику ето все можно переписать в следующем виде

Теорема 7. *Березиниан линейного оператора в $p|q$-мерном пространстве равен отношению следов представлений в инвариантных подпрстранствах, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга $D(p.q+1)$ и $D(p.q+1)$*[7]

$$BerA = \frac{|\mathrm{Tr}\ \wedge^{p-q} A \ldots \mathrm{Tr}\ \wedge^{p} A|_{q+1}}{|\mathrm{Tr}\ \wedge^{p-q+2} A \ldots \mathrm{Tr}\ \wedge^{p+1} A|_{q}} = \pm \frac{\mathrm{Tr}\, A_{D(p,q+1)}}{\mathrm{Tr}\, A_{D(p+1,q)}} \tag{39}$$

Тут стоят детерминанты Ганкеля $q+1$ и q составленные из суперследов внешних степеней A.

Лекция 12 апреля.

[7]Пусть $D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}$-диаграмма Юнга ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s$), пусть V_D, инвариантное подпространство в тензорном произведении $\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{N=\lambda_1+\cdots+\lambda_s \text{ раз}}$, соответствующее диаграмме V_D.

Пусть A-линейный оператор в V ,

След оператора в подпространстве соответствующем диаграмме Юнга равен

$$\mathrm{Tr}\, A_{V_D} = \det(||a_i j||)$$

где $||a_{ij}||$ $s\times s$ матрица, равная

$$a_{ij} = \underbrace{\mathrm{Tr}\,(A\wedge\cdots\wedge)}_{\lambda_i+j-i \text{ раз}}$$

5 Супермногообразия

5.1 Многообразия

Напомним многообразия. Мы обсудим два примера: сферу и кокасательное расслоение,
`Напомнить`

Пример 5.1. n-мерная сфера в $\mathbf{E}^{n+1}$:

$$({}^{1})^2 + \dots ({}^{n+1})^2 = 1\,.$$

stereographic coordinates on the sphere Возьмём северный полюс N и южный полюс S

Первая карта: координаты $u^i = u^i_{(N)}$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 - z\,, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$\begin{cases} x^i = \frac{2u^i}{1+u^2} \\ x^{n+1} = \frac{u^2-1}{1+u^2} \end{cases}$$

Вторая карта: координаты $u^i = u^i_{(S)}$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 + z\,, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$u^i_{(S)} = k u^i_{(N)}, \quad u^2_{(N)} u^2_{(S)} = 1\,.$$

Обсудить, что ответ не просто 'фокус-покус' а следствие теоремы Виета (в силу которой точки с рациональными координатами на сфере переходят в точки с рациональными стереографическими координататми.)

Пример 5.2. T^*M и каноническая симплектическая структура.

Рассмотрим локальные 'хорошие 'координаты $\{x^i, p_j\}$. При переходе к другим 'хорошим' координатам $\{x^{i'}, p_{j'}\}$,

$$p_{j'} = p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,.$$

Зададим невырожденную скобку Пуассона в таких 'хороших' координатах требованием, чтобы

$$\{x^i, x^j\} = 0\,, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j\,, \quad \{p_i, p_j\} = 0\,, \tag{40}$$

Конечно, при этом важно проверить корректность этого определения, то есть то, что формула (40) выполняется в любых 'хороших' координатах. Например проверим, что в любых 'хороших' координатах

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \delta_{i'}^{j'}\,.$$

Имеем

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \{p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, x^k\} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_i^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} = \delta_{i'}^{j'}\,.$$

5.2 Определение супермногообразия

Пусть $\left[\{x^i_{(\alpha)}\}\right]$ это атлас локальных координат на m-мерном многообразии M_0^m, где $\{x^i_{(\alpha)}\}$ определены в областях U_α и $x^i_{(\alpha)} = \Psi^i_{\alpha\beta}(x_{(\beta)})$ это функции перехода. Рассмотрим атлас $\left[\{x^i_{(\alpha)}, \theta^j_{(\alpha)}\}\right]$, где нечётные переменные $\{\theta^j_{(\alpha)}\}$ $(j = 1, \dots, n)$ являются образующими алгебры Грассманна и функции перехода

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \Phi^j_{(\alpha\beta)}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \end{cases} \tag{41}$$

удовлетворяют следующим свойствам:
1) они сохраняют чётность, то есть. $p(\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}) = 0, p(\Phi_{\alpha\beta}) = 1$, где $p(x^i) = 0, p(\theta^j) = 1$,
2) $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)})\big|_{\theta^j=0} = \Psi_{\alpha\beta}(x_{(\beta)})$ и $\partial\Phi^j/\partial\theta^i_{(\beta)}$ являются обратимыми матрицами.

Выполняются условия коцикла:

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}\left(\widetilde{\Psi}_{(\beta\gamma)}\left(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}\right), \Phi_{(\beta\gamma)}\left(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}\right)\right) = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \Phi^j_{(\alpha\beta)}\left(\widetilde{\Psi}^i_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}), \Phi^j_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)})\right) = \Phi^j_{(\alpha\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \end{cases} \tag{42}$$

Координаты $\{x^i_{(\alpha)}, \theta^j_{(\alpha)}\}$ определяют $(m.n)$-мерную суперобласть $\hat{U}^{m.n}_{(\alpha)}$ с подстилающей областью $U^m_{(\alpha)}$. Формулы склейки (41) определяют $(m.n)$-мерное супермногообразие, пдостилающим многообразием которого является M^m. Это определение супермногообразия, принадлежащее Ф. Березину и Д.Лейтесу (см. [**?**], [**?**]). В этом определении у супермногообразия 'нет точек'.

Гладкие функции и функции склейки

5.3 Первые примеры

A. **Суперсфера**

Take $\mathbf{R}^{p+1|2q}$ with coordinates

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots x^{2q}}_{\text{odd}},$$

$$def of sphere S^{m|n}_\rho: \quad (x^1)^2 + \dots + (x^{p+1})^2 + 2\xi^1\xi^{m+q} + \dots + 2\xi^q\xi^{2q} = 1\,. \tag{43}$$

Например, $S^{1|2} \subset \mathbf{R}^{2|2}$.

Функции на $S^{p|2q}$ это функции на $\mathbf{R}^{p+1|q}$ modulo уравнение (**??**).

Координаты на сфере

- 'декартовы координаты'

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots x^{2q}}_{\text{odd}},$$

- 'Соединяя' точку сферы с северным полюсом приходим к координатам

$$\begin{cases} u^i_{(N)} = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}\,, \quad (i=1,\dots,p) \\ \theta^\alpha_{(N)} = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}\,, \\ (\alpha = 1,\dots 2q) \end{cases}$$

- 'Соединяя' точку сферы с южным полюсом приходим к другим координатам

$$\begin{cases} u^i_{()} = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}\,, \quad (i=1,\dots,p) \\ \theta^\alpha_{()} = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}\,, \\ (\alpha = 1,\dots 2q) \end{cases}$$

'Северные' и 'южные' координаты связаны соотношением:

$$u^i_{(N)} = \frac{u^i_{(S)}}{u^2_{(S)}}\,, =$$

где $u^2 = u^i u^i + 2\theta^i\theta^{i+q}$

5.4 Векторные расслоения и супермногообразия

:

Определение 10. Пусть задано гладкое многообразие B. Вещественное векторное расслоение ξ над пространством B это

- топологическое пространство $E = E(\xi)$, *пространство расслоения*
- непрерывное отображения $p\colon E \to B$, проекция
- заданное для каждого $b \in B$ структура векторного пространства на $p^{-1}(b)$
- Выполняется условие *локальной тривиальности*: существует число n, такое, что для каждой $b \in B$ существует окрестность $U \subseteq B$ и гомеоморфизм

$$h\colon U \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(U)\,. \tag{44}$$

При этом соответствие $x \to h(x,b)$ определяет изоморфизм векторных пространств $\mathbf{R}^n$ и $p^{-1}(b)$. Пара (U,h) называется локальной координатной системой для расслоения ξ в окрестности точки b.

Если можно взять U равному B,то расслоение ξ называют *тривиальным расслоением.*

Замечание 20. Все объекты даже если это специально не упомянуто будут гладкими.

5.4.1 Векторные расслоения и супермногообразия

Пусть $\xi = \xi(B, E, n)$ локально тривиальное векторное расслоение и пусть $\mathfrak{A} = \{\varphi_{(\alpha)} x^i_{(\alpha)}\}$ какой нибудь атлас на B.

Тогда изоморфизмы (44) для каждой функции перехода $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi_{(\alpha)} \circ \varphi^{-1}_{(\beta)}$ определяет линейное отображение, изоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя. Этот изоморфизм, конечно, зависит от точки:

$$\rho_{\alpha\beta}(b, \mathbf{x}) = h^{-1}_{(\alpha)} \circ h_{(\beta)}(b, \mathbf{x})$$

При этом соблюдается условие коцикла: для точек, лежащих в пересечении $U_{(\alpha)} \cap U_{(beta)} \cap U_{(gamma)}$ (в которых одновременно определены локальные координаты $_{(\alpha)}$, $_{(\beta)}$ и $_{(\gamma)}$)

$$\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} \circ \rho_{\gamma\alpha} = \mathbf{id}$$

Легко понять, что верно и обратное: задание для произвольного атласа на B, набора изоморфизмов $\rho_{\alpha\beta}$, подчиняющих условиям коцикла, задаёт расслоение.

Теорема 8. *Каждое векторное расслоение $E \to B$ канонически задаёт $(p|q)$-мерное супермногообразие ΠE, где p размерность базы и $q = n$ есть размерность векторного пространства.*

Замечание 21. Измельчением покрытия и выбором новых переменных можно добиться того, чтоб в функциях склейки (41) исчезли 'высшие хвосты':

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}(x^{-}_{(\beta)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \theta^i \Phi^j_i(\alpha\beta)(x_{(\beta)}) \end{cases} \tag{45}$$

Мы приходим к теореме

Теорема 9. *(теорема Березина —Гавенского–Бачелора) Для каждого гладкого супермногообразия F существует векторное расслоение $E \to B$, такое, что $\Pi E = F$.*

Эта теорема верна лишь в гладкой категории.

5.5 Супермногообразие ΠTM и ΠT^*M

. Пусть M произвольное многообразие и пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ это произвольный атлас на M. Рассмотрим касательное расслоение TM и кокасательное расслоение T^*M. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ это произвольный атлас на M.

Пусть $\{v^j_{(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ атлас на TM и $\{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ атлас на T^*M, соответствующие атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ на M, то есть при замене карты

$$v^j_{(\beta)} = v^i_{(\alpha)} \frac{\partial x^j_{(\alpha)}}{\partial x^i_{(\beta)}}\,, \qquad p_{j(\beta)} = p_{i(\alpha)} \frac{\partial x^i_{(\alpha)}}{\partial x^j_{(\beta)}}\,. \tag{46}$$

Мы придём от многообразия к супермногообразию ΠTM если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M, то есть если заменим координаты $v^{j\beta}$ на нечётные координаты $\xi^{j\beta}$, которые при замене карты буду изменяться по тому же закону, что и координаты $v^{j\beta}$ в (46); соответственно мы придём от многообразия T^*M к супермногообразию ΠT^*M если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M, то есть если заменим координаты $p_{j\beta}$ на нечётные координаты $\theta_{j\beta}$, которые при замене карты буду изменяться по тому же закону, что и координаты $p_{j\beta}$ в (46);

Определение 11. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M.

Мы назовём атласы,

$$\begin{array}{cc} \{x^i_{(\alpha)}, p_{j(\beta)}\} & \text{на многообразии } T^*M \\ \{x^i_{(\alpha)}, \theta_{j(\beta)}\} & \text{на супермногообразии } \Pi T^*M \\ \{x^i_{(\alpha)}, v^j_{(\beta)}\} & \text{на многообразии } TM \\ \{x^i_{(\alpha)}, \xi^j(\beta)\} & \text{на многообразии } \Pi TM \end{array} \tag{47}$$

построенные с помощью формул (46) *каноническими атласами* или, *естественными атласами*, соответствующими атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ на M.

Отметим существование канонических чётной и нечётной симплектических структур на кокасательном многообразии T^*M и на ассоциированном с ним супермногообразии ΠT^*M. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M. Тогда рассмотрим канонические атласы $\{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на многообразии T^*M и $\{f_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на супермногообразии ΠT^*M, соответствующие атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ (см. выше в этом пасраграфе замечание 11).

Рассмотрим каноническую чётную скобку Пуассона $\{\_,\_\}_0$ на многообразии T^*M, генерируемую соотношениями

$$\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_0 = 0\,, \quad \{p_{j(\alpha)}, p_{i(\alpha)}\}_0 = 0\,, \quad \{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_0 = \delta^i_j\,.$$

Легко заметить, что это определение не зависит от карты. Например, если одна и та же точка на T^*M находится как в карте $U_{(\alpha)}$ так и в карте $U_{(\beta)}$, то в силу соотношений (46) и правила Лейбница для скобки имеем

$$\{p_{j(\beta)}, x^i_{(\beta)}\}_0 = \left\{ p_{r(\alpha)} \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}}, x^i_{(\beta)} \right\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \left\{ p_{r(\alpha)}, x^i_{(\beta)} \right\} =$$

$$\frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{\beta)}}{\partial x^m_\alpha} \{p_{r(\alpha)}, x^m_{(\alpha)}\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{\beta)}}{\partial x^m_\alpha} \delta^m_r\,.$$

Можно рассмотреть аналогично каноническую нечётную скобку Пуассона $\{\_,\_\}_1$ на супермногообразии ΠT^*M,С генерируемую соотношениями

$$\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_1 = 0\,, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, \theta_{i(\alpha)}\}_1 = 0\,, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_1 = \delta^i_j\,.$$

(Эта скобка имеет и другие названия: скобка Бюттен, скобка Схоутена, антискобка:шя)

Замечание 22. Соотношения (5.5) означает, что координаты $\{x^i, \theta_j\}$ являются координатами Дарбу на ΠT^*M (равно как соотношения (5.5) означают, что координаты $\{x^i, p_j\}$ являются координатами Дарбу на T^*M). Легко понять, что эти координаты Дарбу однозначно строятся по любому атласу локальных координат на .

Предложение 7. *Пусть M произвольное многообразие.*

1. На супермногообразии ΠTM существует каноническая форма объёма, которая равна координатной форме объёма $D(x,\xi)$ в произвольных канонических координатах соответствующим атласу координат $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольного атласа на M,

2. Произвольная форма объёма σ на M определяет форму объёма $\mathfrak{r}_\sigma$ на ΠT^*M, поднятие этой формы

3.Если σ произвольная форма объёма на M, то существует атлас на M, такой, что форма объёма σ становится координатной формой объёма в этом атласе. Если $\{x^i_\alpha\}$ произвольный атлас в котором форма σ является координатной формой, то поднятие $\mathfrak{r}_\sigma$ формы объёма σ с многообразия M на супермногообразие ΠT^*M также является координатной формой объёма в канонических координатах соответствующих атласу $\{x^i_\alpha\}$:

$$\text{если в атласе } \{x^i_\alpha\}\ \sigma = D(x) \Rightarrow \mathfrak{r}_\sigma = D(x,f)\,.$$

`Proof` Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ $\{x^{i'}_{(\beta)}\}$ два произвольных атласа на M и $\{x^i_{(\alpha)}, r^j_{(\alpha)}\}$, $\{x^{i'}_{(\beta)}, r^{j'}_{(\beta)}\}$: соответствующие канонические атласы на ΠTM. Легко понять, что переход от одних координат к другим (если пересечения соответствуюэих карт не пусто) унимодулярен:

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial(x,r)}{\partial(x',r')}\right) = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial r'} \end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} = \frac{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)}{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)} = 1\,.$$

$$\frac{D(x,r)}{D(x',r')} = \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial(x,r)}{\partial(x',r')}\right) = 1\,,$$

то есть форма объёма $D(x,r)$ корректно определена. Мы доказали пункт 1 предложения 7.

Конец лекции 12 апреля
Лекция 19 апреля

6 Интегрирование по поверхностям

Дифференциальные формы.

Определения. Примеры. Интегрирование дифференциальных форм

ω–1-форма

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\Delta\to 0} \sum \omega(\xi_i)\,.$$

Если ω–k-форма, C-k-мерная поверхность разбивается на k-мерные (криволинейные) параллелипипеды

Интеграл k-формы в ориентированном $\mathbf{R}^k$.

$$\omega = a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k, , \int \omega_D = \int a(x)dx^1 \dots dx^k \,,$$

где $(^1, \dots, x^k)$ *ориентирующая* система координат в $\mathbf{R}^k$.

Операция $f^*\omega$

Пусть ω–k-форма в $\mathbf{R}^n$, $n > k$,

D–область в $\mathbf{R}^k$

'путь интегрирования'–$\sigma = (D, f, Or)$

a) D-область в $\mathbf{R}^k$.

b) $f\colon D \to M$

c) ориентация $\mathbf{R}^k$, Or.

Определение:

$$\int \omega_\sigma = \int_D f^*\omega \,.$$

Цепи

Интеграл от формы по цепи.

Упражнение 25. *Определить поток векторного поля через поверхность, доказать теорему Остроградского-Гаусса*

Теорема 10.

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \,.$$

`Решение` Пусть $\mathbf{K}$ векторное поле на $\mathbf{E}^3$, Ω-форма объёма, и M-поверхность в $\mathbf{E}^3$. Поток векторного поля через поверхность. это интеграл по поверхности от 2-формы $\iota_{\mathbf{K}}\Omega$.

Теперь пусть $M = \partial D$, тогда

$$\text{поток векторного поля через границу поверхности} =$$

$$\int_{\partial D} \iota_{\mathbf{K}}\Omega = \int d\left(\iota_{\mathbf{K}}\Omega\right) = \int_D \operatorname{div} \mathbf{K}\Omega$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\iota_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega} = \frac{\mathfrak{L}_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega} \,.$$

$M = \partial D$

Упражнение 26. *Рассмотреть $\varphi = -\frac{1}{r}$. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{R}_{d\varphi}$*

В этом упражнении мы будем использовать kak сферические так декартовы координаты в $\mathbf{E}^3$.

`Решение` В сферических координатах 1-форма

$$d\Phi = \frac{dr}{r^2}\,,$$

квадрат элемента длины:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

то есть вектор дуальный ковектору $d\varphi$ будет

$$\mathbf{K} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,, \text{(закон Кулона)}$$

так как форма объёма

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin^\theta dr \wedge \wedge d\varphi$$

то внутреннее произведение формы поля $\mathbf{K}$ на форму объёма есть

$$\iota_{\mathbf{K}}\Omega = \iota_{\frac{\partial}{r^2\partial r}}(dx \wedge dy \wedge dz) = \iota_{\frac{\partial}{r^2\partial r}}\left(r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\right) =$$

$$\sin\theta d\theta \wedge d\varphi\,.$$

Мы приходим к

$$\text{поток векторного поля } q\mathbf{K} \text{ через поверхность равен } \int \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi q\,.\text{(закон Гаусса)}$$

v Соответствие

$$\text{дифференциальная форма на } --- \text{ гладкая функция на } \Pi T^*M ---$$

$$\text{дифференциал де Рама } d --- \text{ векторное поле на } \Pi T^*M$$

Формы на ΠTM

Пусть M многообразие.

Рассмотрим TM и ΠTM, меняя чётность координат слоя.

Если $x^1, \dots, x^n$)—локальные координаты на , то $(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$ локальные координаты на ΠTM.

Если x^i чётные координаты, то dx^i нечётные координаты: $p(dx^i) = p(x^i) + 1$. Функции на ΠT это дифференциальнуе формы на :

$$\omega(x, dx) = \underbrace{\omega(x)}_{\text{0-form}} + \underbrace{\omega_i(x) dx^i}_{\text{1-form}} + \cdots + \underbrace{\omega_{\text{top}}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n}_{n\text{-form}}$$

If M is a supermanifold then $\omega(x, dx)$, function on ΠTM is pseudodifferential form. We do it later

Каноническая форма объёма на ΠTM Пусть $(x^{i'}, dx^{j'})$ новые локальные координаты: $\begin{cases} x^i = x^i(x^{i'}) \\ dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \end{cases}$. Березиниан преобразования равен

$$\left|\frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')}\right| = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial dx}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial dx'} & \frac{\partial dx}{\partial dx'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} dx' \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} = 1\,.$$

Мы пришли к канонической форме объёма $D(x, dx)$

$$D(x, dx) = \underbrace{\mathrm{Ber}\,\frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')}}_{\text{equals to 1}} D(x', dx')\,.$$

и определим интеграл на ΠTM.

Интеграл по ΠTM

$$\int_{\Pi TN} \omega(x, dx) D(x, dx) =$$

$$\int_{\Pi TN} \left(\omega(x) + \omega_i(x) dx^i + \cdots + \omega_{\mathrm{top}}(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n\right) D(x, dx) =$$

$$\int_M \omega_{\mathrm{top}}(x) D(x) = \int_M \omega\,.$$

.

: Thus we arrive at invariant definition of integral of pseudodifferential form $\omega(x, dx)$ in the case if is a superspace.

Интегрирование вдоль поверхности

Пусть C поверхность in . Пусть C определено отображением $D \xrightarrow{\varphi} N$. Пусть $\omega = \omega(x, dx)$ форма на .

Тогда $\int_C \omega = \int_D \varphi^* \omega$. Если $\varphi\colon\ x^i = x^i(\xi^\alpha)$ то

$$\int_C \omega = \int_D \omega\left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha\right) =$$

$$\int_{\Pi TD} \omega\left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha\right) D(\xi, d\xi)\,,$$

где $D(\xi, d\xi)$ канони:шяческая форма обьёма на суперпространстве параметров ΠTD .

$$\int_C \omega = \int_{\Pi TC \subset \Pi TM} \omega\, D(\xi, d\xi)\,.$$

лекция 26 апреля

Псевдодифференциальные формы—функции на ΠTM.

6.1 Плотности и псевдодифференциальные формы

Мы представим некоторые результаты теории интегрирования (see [28], [64], [40]).

Пусть $\Omega^{m.n}$ $(m|n)$–мерная поверхность в суперпространстве $E^{M.N}$, заданная параметризацией $z^A = z^A(\zeta^B)$ (отображение суперпространства параметров $E^{m|n}$ в $E^{M|N}$ где $z^A = (x^1, \dots, x^M, \theta^1, \dots, \theta^N)$ координаты суперпространства $E^{M.N}$ и $\zeta^B = (\xi^1, \dots, \xi^m,\ \nu^1, \dots, \nu^n)$ координаты $E^{m.n}$ (параметры.)

Рассмотрим функционал $\Phi_A(\Omega)$ заданный на суперпространстве $(m|n)$–поверхностях выражением:

$$\Phi_A(\Omega) = \int A\left(z^A(\zeta), \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \dots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}}\right) d^{m+n}\zeta \tag{48}$$

где A такая. что

$$A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \tilde{\zeta}^B}, \cdots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \tilde{\zeta}^{B_1} \dots \partial \tilde{\zeta}^{B_k}}\right) = \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\zeta}}\right) \cdot A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \cdots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}}\right). \tag{49}$$

Если условие (49) соблюдается то функционал (48) не зависит от параметризации $z(\zeta)$ of the суперповерхности Ω.

Функция A уд. условиям (49) называется $(m|n)$ плотностью ранга k.

Плотность задаёт аддитивный функционал:

$$\Phi_A(\Omega_1 + \Omega_2) = \Phi_A(\Omega_1) + \Phi_A(\Omega_2)\,.$$

Примеры плотностей

а) элемент длины

инвариант Пуанкаре Картана

а) в обычной математике

б) для чётной симплектической структуры

6.2 Плотности и псевдодифференциальные формы

Пусть $W(z, z*)$ функция на ΠTM, где M супермногообразие.

Если многообразие мы придём к дифференциальным формам.

Примеры.

6.3 псевдодифференциальные формы и плотности

Преобразование Баранова-Шварца сопоставляет каждой псевдодофференциальной форме плотность...

Разбор.

6.4 формы Воронова-Зорича

Рассмотрим подробнее случай, когда ранг равен единице.

$$A = A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right) . \tag{3.1.4}$$

Условие (49) перепишртся в виде

$$A\left(z^A, K^B_{B'}\frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right) = \operatorname{Ber} K \cdot A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right) . \tag{3.1.5}$$

$$\operatorname{Ber}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\operatorname{Det}(A - BD^{-1}C)}{\operatorname{Det} D} \tag{3.1.6}$$

В обычном (не супер) случае, условие линейности по $\frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}$ $\Leftrightarrow$ дифференциальная форма:

k–форме $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k}$ соответствует плотность

$$A_\omega =< \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1}, \dots, \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k}, \omega >= k! \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1} \cdots \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k} ,$$

$$\Phi_A(\Omega^k) = \int_{\Omega^k} \omega . \tag{3.1.7}$$

Выполнение условия 3.1.5 связано с тем, что детерминант это полилинейная антисимметрическая функция от векторов $\frac{\partial x^a}{\partial \zeta^b}$.

Теорема Стокса соблюдается

$$\Phi_{A\omega}(\partial\Omega) = \Phi_{A_{d\omega}}(\Omega) \tag{3.1.8}$$

Замечание 23. Можно показать, что выполнение теоремы Стокса, достаточное условие: Плотность а необходимостью соответствует форме, если теорема Стокса выполняется.

Что происходит в суперслучае?

В обычной математике дифференц. форма одновременно и полилинейная функция и объэкт интегрирования. В суперслучае мы приходим к разным объектам к

$$\omega(\dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots) = -\omega(\dots, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \dots)(-1)^{p(u)p(v)} . \tag{3.1.9}$$

не имеет отношения к форме объёма.

Строя объекты интегрирования в суперслучае кмы должны быть внимательны к теореме Стокса,

Какие условия надо поставить на плотность, чтоб не нарушить теорему Стокса.

Пусть две $(m|n)$ поверхности Ω_0 и Ω_1 заданы параметризацией $z^A_0 = z^A_0(\zeta^B)$ и $z^A_1 = z^A_1(\zeta^B)$ и пусть

$$z^A = z^A(t, \zeta^B) , \ (0 \le t \le 1) : \quad z(0, \zeta^B) = z_0(\zeta^B),\ z(1, \zeta^B) = z_1(\zeta^B) \tag{3.1.10}$$

это параметризация $(m+1|n)$ поверхности $\mathcal{V}$

$$\partial\mathcal{V} = \Omega_1 - \Omega_0 \tag{3.1.11}$$

A это плотность ранга 1 если

$$\Phi_A(\partial\mathcal{V}) = \Phi_A(\Omega_1) - \Phi_A(\Omega_0) = \int d\zeta^{m+n} \int_0^1 dt \frac{d}{dt} A\left(z^A(t,\zeta^B), \frac{\partial z^A(t,\zeta^B)}{\partial \zeta^B}\right) =$$

$$\int d\zeta^{m+n} \int dt \left[\left(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A} + \frac{dz^A_B}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}\right)\right] =$$

$$\int d\zeta^{m+n} \int dt \left[\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A} + \frac{d}{d\zeta^B}\left(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}\right) - \frac{dz^A}{dt}\frac{d}{\partial\zeta^B}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}(-1)^{p(B)p(A)}\right] =$$

$$\int d\zeta^{m+n} dt (\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A} - (\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial z^{A'}}{\partial\zeta^B}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}\partial z^A_B} + \frac{dz^A}{dt}\frac{\partial z^{A'}_{B'}}{\partial\zeta^B}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B})(-1)^{p(A)p(B)}) + \ . \tag{3.1.12}$$

(Обозначения: $z^A_B = \frac{\partial z^A}{\partial\zeta^B}$).

Мы видим, что вторые производные не дают вклад в интеграл если

$$\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial^2 z^{A'}}{\partial\zeta^B\partial\zeta^{B'}}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B}(-1)^{p(A)p(B)} = 0 \quad ..$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B} = -(-1)^{p(B)p(B')+(p(B)+p(B'))p(A)}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_B\partial z^A_{B'}} \tag{3.1.13}$$

7 Гамильтонова механика в суперпространстве

Лекция 16 мая

7.1 Физика в школе

$$F = ma$$

7.2 Лагранжиан и уравнения Эйлера-Лагранжа

$$L(q,\dot q)$$

Equations of motion

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)$$

7.3 Гамильтонова механика

$$\dot f = \{H, f\}\,.$$

7.4 Квантовая механика

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

Принцип соответствия в квантовой механике

Оператор $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i} \longrightarrow$ Функция p_i

Оператор $\hat{q}^i = x^i \longrightarrow$ Функция x^i

Рассмотрим скобку Пуассона

$$\{f(p,x,\theta), g(p,x,\theta)\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\frac{\partial g}{\partial \theta_i}$$

$$\{f(p,q)g(p,q)\} = \lim_{\hbar\to 0}\frac{i}{\hbar}\left[f(\hat{p},\hat{q})g(\hat{p},\hat{q}) - g(\hat{p},\hat{q})f(\hat{p},\hat{q})\right]$$

7.5 электрон в электромагнитном поле

$$H = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 + e\varphi - \frac{e}{2mc}\sigma\mathbf{H}$$

$$\sigma\mathbf{H} = H_x\sigma_x + H_y\sigma_y H_z\sigma_z$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Матрицы Паули подчиняются антикоммутационныум соотношениям

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

7.6 Квантовая механика → Механика в суперпространстве

Что и как надо добавить в принцип соответствия?

Оператор $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i} \longrightarrow$ Функция p_i

Оператор $\hat{q}^i = x^i \longrightarrow$ Функция x^i
Оператор $\sigma_i = () \longrightarrow$ Функция θ_i
Рассмотрим скобку Пуассона

$$\{f(p,x,\theta), g(p,x,\theta)\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\frac{\partial g}{\partial \theta_i}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{x}^j]_- = \tfrac{\hbar}{i}\delta_i^j = \{p_i, \}$$

Последняя лекция 2021 год, 31 мая

8 Симплектическая структуры, чётная и нечётная на суперпространстве.

Мы исследуем свойства динамической системы, оснащённой скобками разной чётности, и введём инвариантную формулу для Δ-оператор Баталина-Вилковыского на функциях.

В противоположность обычной математике, где любая невырожденная скобка Пуассона (то есть симплектическая структура) локально редуцируется к канонической форме (теорема Дарбу) в суперматематике есть ровно две возможности. Обычная невырожденная чётная скобка Пуассона, соответствующая чётной симплектической структуре, сопрягает половину бозонных переменных другой половине, а фермионные координаты сами себе Вторая возможность заключается в том, что в суперпространстве с одинаковым количеством бозонных и фермионных координат определена невырожденная нечётная скобка Пуассона соответствующая нечётной симплектической структуре, и эта скобка сопрягает бозонные координаты фермионным.

Это означает, что в суперпространстве размерности $(2m|2m)$ можно рассмотреть две, чётную и нечётную невырожденные скобки Пуассона. Мы можем изучать механики как по отношению к чётной, так и по отношению к нечётной скобки. но мы можем и изучать механику по отношению к обеим симплектическим структурам: мы показываем , что группа преобразований $(2m|2m)$-мерного суперпространства, которые сохраняют две невырожденные скобки различной чётности конечномерна. Эти преобразования определяют динамики, которые гамильтоновы для обеих скобок. Более того оказывается, что эта динамика суперсимметрична.

Например, в случае если две скобки имеют канонический вид, то оказывается, что лишь суперосцилляторная динамика уважает обе скобки. Например, одномерная динамика суперосциллятора, может быть определена, как единственная динамика, которая является гамильтоновой для канонических чётной и нечётной скобок в $2|2$-мерном суперпространстве.

В общем случае мы не можем приводить две скобки, чётную и нечётную к каноническому виду. Структура группы преобразований зависит от их взаимного расположения, однако как отмечалось выше группа преобразований, сохраняющих две невырожденные скобки различной чётности всегда конечномерна, (если не нульмерна).

Следует отметить, что несмотря на то, что симплектическая структура на супермногообразии может быть как чётной так и нечётной, физики не рассматривали серьёзно нечётную симплектическую структуру до работы Баталина и Вилковыского . В этой работе важнейшим ингредиентом являлась нечётная симплектическая структура на многообразии полей: в координатах Дарбу на суперпространстве $E^{n|n}$ с координатами

$$z^A = \left(\underbrace{x^1, \ldots, x^n}_{\text{чётные координаты}} \; ; \; \underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_n}_{\text{нечётные координаты}} \right)$$

она задаётся 2-формой $\Omega = dx^i d\theta_i$ и соответствующая ей невырожденная нечётная скобка Пуассона сопрягает чётные и нечётные переменные

$$\{x^i, \theta_j\} = -\{\theta_j, x^i\} = 0\,, \quad \big(\{x^i, x^j\} = \{\theta^i, \theta_j\} = 0\big) \tag{50}$$

Вторым важным ингредиентом этой работы был дифференциальный оператор второго порядка, так называемый Δ-оператор: напомним, что этот оператор в простом случае имеет вид

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial x^i \partial \theta_i}\,. \tag{51}$$

Этот оператор инвариантен относительно всех канонических унимодулярных преобразований, то есть преобразований, которые сохраняют нечётную симплектическую 2-форму $\Omega = dx^i d\theta_i$ или по другому нечётную скобку (**??**) и сохраняют координатную форму объёма:

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial(x',\theta')}{\partial(x,\theta)}\right) = 1 \,\text{i.e.}\, D(x',\theta') = D(x,\theta)\,, \tag{52}$$

где $D(x,\theta)$ координатная форма объёма Этот оператор безусловно проистекает из нечётной симплектической геометрии,однако он неинвариантен относительно всех канонических неунимодулярных преобразований

Мы знали, что между свойствами чётной и нечётной симплектических структур есть фундаментальное различие: чётная симплектическая структура имеет форму объёма , тогда как нечётная не сохраняет никакой формы объёма. По результатам первой главы стало понятно, что инварианты Пуанкаре-Картана для нечётной скобки сильно отличаются от таковых для чётной скобки.

Мы намереваемся изучать суперсимметричные динамики, которые гамильтоновы относительно чётной и нечётной симплектических структур Затем мы перейдём к другой 'крайности': мы будем изучать инварианты нечётной структуры и формы объёма, порождённой чётной структурой. На этом пути мы придём к определению Δ-оператора, который является инвариантом канонических преобразований, сохраняющих нечётную симплектическую структуру и формы объёма

Мы доказываем теорему о конечномерности пространства векторных полей, которые являются гамильтоновыми по отношению к двум симплектическим структурам разной чётности. Наше доказательство близко к доказательству факта из римановой геометрии,что пространство векторных полей, которые не меняют данной римановой метрики, конечномерно. В заключение этого параграфа мы обсуждаем примеры и в частности обсуждаем задания гамильтоновой системы двумя скобками без гамильтониана.

Вводится инвариантное определение Δ-оператора Баталина Вилковыского на функциях и изучаются его свойства.

8.1 Гамильтонова динамика в суперпространствах с двумя симплектическими структурами разной чётности

Рассмотрим вещественное $(2m|2m)$-мерное суперпространство, оснащённое одновременно чётной и нечётной симплектической струтурами. Если не оговорено противное, будем считать, что эти структуры неканоничны. В этом параграфе мы покажем. что супералгебра векторных полей, которые сохраняют чётные и нечётные симплектические структуры *конечномерна.*

Итак пусть на суперпространстве $E^{2m|2m}$ заданы две симплектические структуры, чётная и нечётная. Обозначим G_0 супергруппу преобразований, сохраняющих чётную симплектическую структуру и обозначим $\mathcal{G}_0$ супералгебру векторных полей, которые сохраняют чётную симплектическую структуру. Соответственно обозначим G_1 супергруппу преобразований, сохраняющих нечётную симплектическую структуру и обозначим $\mathcal{G}_1$ супералгебру векторных полей, которые сохраняют нечётную симплектическую структуру.

Мы докажем, что супералгебра $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ конечномерна.

Замечание 24. Большинство утверждений , обсуждаемых в этой главе проходит для супермногообразий, хотя мы и иногда не будем, этого специально оговаривать. Например, одно из основных утверждений этой главы о конечномерности пространства векторных полей, которые являются гамильтоновыми одновременно для двух симплектических структур разной чётности сформулировано для суперпространств, однако, легко переносится на случай супермногообразий, оснащённых двумя симплектическими структурами различной чётности.

Обозначим $\{\_,\_\}_0$ ($\{\_,\_\}_1$) чётную (нечётную) невырожденную скобку Пуассона, соответствующую чётной (нечётной) симплектической структуре. Произвольная функция h на $E^{2m|2m}$ генерирует векторное поле (??), которое принадлежит $\mathcal{G}_0$ ($\mathcal{G}_1$) с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}_0\,, \left(\frac{df}{dt} = \{Q, f\}_1\,,\right) \tag{53}$$

Замечание 25. Два слова о суперсимметричной динамики.

Мы говорим, что гамильтониан H задаёт суперсимметричную динамику, если эта динамика имеет нечётный интеграл движения, то есть если существует нечётная функция Q, такая, что

$$\{H, Q\} = 0\,.$$

Замечание 26. Чётный гамильтониан H генерирует *чётное векторное поле* с помощью чётной симплектической структуры

$$\mathbf{D}_H = \{H, z^A\}_0 \frac{\partial}{\partial z^A} \tag{54}$$

и нечётный гамильтониан Q генерирует *чётное векторное поле* с помощью нечётной симплектической структуры

$$\mathbf{D}_Q = \{Q, z^A\}_1 \frac{\partial}{\partial z^A}\,, \tag{55}$$

Определение 12. Пусть $E^{2m|2m}$-суперпространство, оснащённое чётной и нечётной симплектическими структурами. Будем говорить, пара гамильтонианов (H, Q),где H-чётный гамильтониан и Q-нечётный гамильтониан, *совместно* описывают динамику на этом суперпространстве если гамильтоново векторное поле $\mathbf{D}_H$

(см. (54)) чётного гамильтониана H совпадает с гамильтоновым векторным полем нечётного гамильтониана (см. (55)): $\mathbf{D}_H = \mathbf{D}_Q$ то есть если

$$\{H, f\}_0 \equiv \{Q, f\}_1 \quad \text{для любой функции } f\,, \tag{56}$$

где $\{\_,\_\}_0$ чётная невырожденная скобка Пуассона, соответствующая чётной симплектической структуре и $\{\_,\_\}_1$ нечётная невырожденная скобка Пуассона, соответствующая нечётной симплектической структуре

Теперь сформулируем предложение

Предложение 8. *Пусть на суперпространстве $E^{2m|2m}$ заданы чётная и нечётная симплектические структуры.*

- *суперпространство пар гамильтонианов, которые совместно описывают динамику конечномерно.*
- *Если пара гамильтонианов (H, Q) совместно описывают динамику, то эта динамика суперсимметрична,*

Второе утверждение предложения почти очевидно. Действительно если пара гамильтонианов и (H, Q) $(p(H) = 0,\ p(Q) = 1)$ совместно описывают динамику, то из соотношения (56) вытекает, что при $f = Q$

$$\{H, Q\}_0 = \{Q, Q\}_1 = 0\,,$$

так как для любой нечётной функции f, $\{f, f\} = -\{f, f\} = 0$.

Первое утверждение предложения вытекает из леммы:

Лемма 1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^A} = R_A^B(z)\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z^B}\,, \tag{57}$$

где пара (f, φ) это функции суперпространстве, $\mathbf{R}(z)$–нечётный обратимый оператор ($p(R_B^A) = 1+p(A)+p(B)$, существует $\mathbf{T}(z)$, такой, что $\mathbf{R}\cdot\mathbf{T} = 1$). Эта система имеет конечномерное суперпространство решений.

Действительно,две симплектические структуры разной чётности задают линейный оператор; мы перейдём от уравнения (56) к эквивалентному уравнению (57):

$$\{H, z^A\}_0 \equiv \{Q, z^A\}_1 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial z^A} = \underbrace{\Omega_{AC}^{(0)}\Omega_1^{CB}}_{R_B^A}\frac{\partial Q}{\partial z^B}\,.$$

Осталось доказать лемму.

Для того чтобы доказать лемму, мы используем некоторые условия интегрируемости уравнения (57). Му покажем, что если пара функций $(f(z), \varphi(z))$ является решением уравнения (57), то значения функции $\varphi(z)$, первых и вторых производных в любой точке z_0 однозначно определят значения всех высших производных в этой точке[8].

Рассмотрим

$$\Gamma_{A_n\ldots A_1} = L_{A_n}\ldots L_{A_1}\partial_B\varphi(z)\Big|_{z_0}\,, \tag{58}$$

где $\varphi(z)$ решение уравнения (57) и $L_A = R_A^B(z)\partial_B$. Так как $\mathbf{R}$ нечётный оператор, то

$$L_A L_B = L_B L_A(-1)^{\tilde{p}(A)\tilde{p}(\tilde{B})} + \ldots \tag{59}$$

[8] мы ищем решения в формальных степенных рядах

$$L_A \partial_B = -\partial_B L_A (-1)^{\tilde{p}(A) p(\tilde{B})} + \dots \tag{60}$$

Мы полагаем $p(A)$-чётность A и $\tilde{p}(A) = p(A) + 1$, многоточия обозначаем члены в которые вносят вклад производные меньших степеней. Из коммутационных соотношений (59) и (60) получаем, что $\Gamma_{A_n \dots A_1}$ суперсимметричны (с точностью до многоточий) при перестановке индексов A_i и антисуперсимметричны (с точностью до многоточий) при перестановке индексов A_1 и B:

$$\Gamma_{\dots A_i A_{i+1} \dots B} = \Gamma_{\dots A_{i+1} A_i \dots B} (-1)^{\tilde{p}(A_i) \tilde{p}(A_{i+1})} + \dots \tag{61}$$

$$\Gamma_{\dots A_1 B} = -\Gamma_{\dots B A_1} = (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B)} + \dots \tag{62}$$

Используя эти коммутационные соотношения нетрудно показать, что

$$\Gamma_{A_n \dots A_1 B} = 0 + \text{члены, содержащие производные степени} \leq n\,.$$

Например:

$$\Gamma_{A_2 A_1 B} = -\Gamma_{A_2 B A_1} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B)} + \dots = \tag{63}$$

$$-\Gamma_{B A_2 A_1} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B) + \tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2)} + \dots =$$

$$\Gamma_{B A_1 A_2} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B) + \tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2) + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2)} + \dots =$$

$$\Gamma_{A_1 B A_2} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(B)) + \tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2) + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2)} + \dots =$$

$$\Gamma_{A_1 B A_2} (-1)^{\tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2) + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2)} + \dots =$$

$$-\Gamma_{A_1 A_2 B} (-1)^{\tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2 + \tilde{p}(B) \tilde{p}(A_2)) + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2)} + \dots =$$

$$-\Gamma_{A_1 A_2 B} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2)} + \dots = -\Gamma_{A_2 A_1 B} (-1)^{\tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2 + \tilde{p}(A_1) \tilde{p}(A_2))} + \dots =$$

$$-\Gamma_{A_2 A_1 B} + \dots\,, \tag{64}$$

значит

$$2\Gamma_{A_2A_1B} = 0 + \text{члены с производными порядка} \leq 2.$$

Так как $\mathbf{R}$ в лемме 1 обратимый оператор (скобки Пуассона в уравнении (56) невырождены), то мы видим, что в уравнении (57) все высшие производные рекуррентно выражаются через значения функции $\varphi(z)$ и её первых двух производных в точке z_0. Лемма доказана.

Замечание 27. Доказательство леммы с одной стороны содержит серьёзный недостаток: оно проходит для формальных степенных рядов. С другой стороны основанное на комбинаторной лемме, что тензор третьего ранга, симметричный по первому и второму индексам и антисимметричный по второму и третьему индексам равен нулю, оно сильно напоминает доказательство стандартного утверждения из римановой геометрии о том, что размерность пространства изометрий римановой метрики конечно ('Количество Киллингов' n-мерного риманового пространства (размерность векторного пространства изометрий) не превышает $\frac{n(n+1)}{2}$). Напомним это рассуждение.

Векторное поле $\mathbf{K}$ сохраняет риманову метрику (является векторным полем Киллинга на римановом многообразии) если и только если следующая билинейная форма

$$B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{K}, \mathbf{Y} \rangle \tag{65}$$

антисимметрична, где $\langle \_, \_ \rangle$ риманова метрика, ∇–её Леви чивитовская связность, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$-произвольные векторные поля (см. любой стандартный учебник по римановым многообразиям). Технически это условие сводится к тому, что для векторного поля Киллинга

$$\partial_\mu K_\nu = -\partial_\nu K_\mu + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} K_\sigma = -\partial_\nu K_\mu + \dots \tag{66}$$

где мы обозначаем ... члены, зависящие от производных меньшего порядка (в данном случае нулевого порядка).

Обозначим

$$T_{\mu_1\dots\mu_n\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} K_\nu\right)\Big|_{x_0}$$

и сравним $T_{\mu_1\dots\mu_n\nu}$ с $\Gamma_{A_1\dots A_n B}$ в соотношении (58): Мы видим, что также как и в в соотношении (59): и в (60): тензор $T_{\mu_1\dots\mu_n\nu}$ симметричен по индексам $\mu_1,\dots,\mu_n$ и антисимметричен про перестановке индексов μ_n и ν. Также как и в соотношениях (60) это проводит к тому, что в каждой точке x_0 все высшие производные Киллингова векторного поля однозначно определяются значением этого поля в точке x_0 и его первых производных. Это доказывает, конечномерность алгебры изометрии риманового многообразия.

Мы видим, что это доказательство имеет тот же недостаток, и оно может быть устрожнено, также как и доказательство этого стандартного факта дифференциальной геометрии.

Замечание 28. В случае если $\mathbf{R}(z)$ не зависит от z, то пересечение алгебр $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_1$ генерируется линейными и квадратичными гамильтонианами. Мы видим, что точно также как как и для плоского риманового пространства (эвклидова пространства) в плоском случае, когда чётная и нечётная симплектические структуры представлены постоянными, независящими от точки формами, преобразования, сохраняющие обе скобки различной чётности исчерпываются трансляциями и линейными преобразованиями. (см, подробно параграф **??**)

8.1.1 Примеры

Рассмотрим (2|2)-мерное суперпространство $E^{2|2}$ с координатами (p, q, θ, φ), оснащённое двумя симплектическими структурами, представленными нечётной и нечётной невырожденными скобками, нечётная скобка:

$$\{f, g\}_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) + (-1)^{p(f)}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \qquad (67)$$

и чётная скобка:

$$\{f, g\}_0 = a(p.q)\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right) + (-1)^{p(f)}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right), \qquad (68)$$

где $a(p, q)$-произвольная функция, нигде не обращающаяся в нуль. Покажем, что тождество Якоби выполняется для чётной скобки (68). (Тождество Якоби автоматически выполняется для нечётной скобки (67), так как это просто каноническая скобка Буттин (**??**)).

Это так, потому что в координатах

$$\tilde{p} = \int \frac{dp}{a(p, q)} \quad \tilde{q} = q\,, \tilde{\theta} = \theta\,.\tilde{\varphi} = \varphi\,.$$

она становится канонической. Уравнения (56)принимают вид

$$\begin{cases} -a(p, q)\frac{\partial H}{\partial q} = (-1)^{p(Q)}\frac{\partial Q}{\partial \theta}\,, \\ a(p, q)\frac{\partial H}{\partial p} = (-1)^{p(Q)}\frac{\partial Q}{\partial p}\,, \\ (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial p}\,, \\ (-1)^{p(H)}\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\,, \end{cases} \qquad (p(H) = p(Q) + 1)\,.$$

Решив эти уравнения, мы найдем алгебру преобразований, которые сохраняют обе скобки, чётную (68) и нечётную (67); эту алгебру мы обозначим $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$.

Решим их:

- i) функция $a(p, q)$ это константа, тогда

$$\begin{cases} H = c_1 \frac{p^2+q^2}{2a-\theta\varphi} + c_2 p + c_3 q + \\ d_1(-p\theta - q\varphi) + d_2\theta + d_3\varphi \\ Q = c_1(q\theta - p\varphi) + ac_3\theta - ac_2\varphi + \\ d_1 \frac{p^2+q^2}{2+a\theta\varphi} - d_2 p - d_3 q \end{cases}$$

  В этом случае алгебра сохранения двух скобок, $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ будет $3|3$-мерной алгеброй. Она содержит следующие векторные поля:

  – вращение

$$p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p} - \varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \theta\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

  – нечётное вращение

$$-a\theta\frac{\partial}{\partial q} + a\varphi\frac{\partial}{\partial p} + p\frac{\partial}{\partial \theta} + +q\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

  – две чётные трансляции

$$\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q},$$

  – две нечётные трансляции

$$\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

- ii) функция $a(p, q)$ не является константой, но при этом она удовлетворяет следующему ограничению: существуют такие числа m_1, m_2 и m_3, что

$$a(p,q) = m_1(p,q)\frac{p^2+q^2}{2} + m_2 p + m_3 q \tag{69}$$

В этом случае

$$\begin{cases} H = c_1\left(\int \frac{du}{a(u)} - m_1\theta\varphi\right) + \\ d_2\theta + d_3\varphi \\ \left(u = m_1\frac{p^2+q^2}{2} + m_2 p + m_3\right) \\ Q = c_1\left(m_1\left(q\theta - p\varphi\right) + m_3\theta - m_2\varphi\right) - \\ -d_2 p - d_3 q \end{cases},$$

то есть $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ в этп, случае будет алгеброй размерности $1|2$. Оно содержит чётное векторное поле

$$(m_1 p + m_2)\frac{\partial}{\partial q} - (m_1 q + m_3)\frac{\partial}{\partial p} - m_1\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + m_1\theta\frac{\partial}{\partial \varphi}\,.$$

и два нечётных векторных полей, две нечётные трансляции

$$\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

- iii) функция $a(p,q)$ произвольная функция, которая не является константой и не удовлетворяет условию (69). В этом случае

$$\begin{cases} H = d_2\theta + d_3\varphi \\ Q = -d_2 p - d_3 q \end{cases}$$

то есть $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ в этп, случае будет алгеброй размерности $0|2$. Она содержит лишь две нечётные трансляции

$$\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

8.2 Δ-оператор Баталина-Вилковыского на функциях

В предыдущих параграфах мы изучали векторные поля, которые были гамильтоновыми одновременно для чётной и для нечётной симплектических структур. С другой стороны чётная симплектическая структура порождает форму объёма

$$\mathfrak{v}_\omega = \sqrt{Berw_{AB}}D(x,\theta)\,, \tag{70}$$

где $D(x,\theta)$-координатная форма объёма (см. приложение **??**).

На основании работы [?] мы изложим конструкцию Δ-оператора на функциях на нечётном симплектическом супермногообразии, оснащённой произвольной формой объёма

$$\mathfrak{v} = \rho(x,\theta)D(x,\theta)\,, \tag{71}$$

Изложим эту конструкцию[9].

Дело в том, что наличие формы объёма (**??**) позволяет определить оператор Δ действие которого на любую функцию равно (с точностью до коэффициента) дивергенции гамильтонового векторного поля, соответствующей этой функции вдоль этой формы объёма А именно, используем формулу (**??**): каждой функции f согласно формуле (**??**) соответствует гамильтоново векторное поле $\mathbf{D}_f = D_f^A \frac{\partial}{\partial z^A}$, где $\mathbf{D}_f$: $\mathbf{D}_f g = \{f,g\}$. Взяв дивергенцию этого поля по отношению к форме объёма приходим (с точностью до множителя) к оператору Δ_ρ зависящего от формы объёма (71):

$$\Delta_{\mathfrak{v}} f = \frac{1}{2}(-1)^{p(f)}\mathrm{div}_{\mathfrak{v}}\mathbf{D}_f = \frac{1}{2}(-1)^{p(f)}\left(\frac{\mathfrak{L}_{\mathbf{D}_f}\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}}\right) =$$

[9]Конечно, мы пришли к этой конструкции в работе [?], исходя из формы объёма (70) порождённой чётной симплектической структурой.

$$= \frac{1}{2}(-1)^f \left((-1)^{p(\mathbf{D}_f z^A + z^A)} \frac{\partial}{\partial z^A}\{f, z^A\} + D_f^A \frac{\partial \log \rho(z)}{\partial z^A} \right) . \tag{72}$$

В координатах Дарбу:

$$\Delta_{\mathfrak{r}} f = \Delta_0 f + \frac{1}{2}\{\log \rho, f\}\,, \tag{73}$$

где форма объёма $\mathfrak{r}$ задана формулой (71). Заметим, что в случае если форма объёма координатная в Дарбу координатах, то мы приходим к оператору

$$\Delta_0 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial \theta_i}\,. \tag{74}$$

Именно этот оператор был предложен в работе [?].

Δ-оператор на функциях удовлетворяет соотношениям [?] и [?]

$$\Delta_{\mathfrak{r}}\left(\{f, g\}\right) = \{\Delta_{\mathfrak{r}} f, g\} + (-1)^{p(f)+1}\{f, \Delta_{\mathfrak{r}} g\}\,,$$

и

$$\Delta_{\mathfrak{r}}(f \cdot g) = \Delta_{\mathfrak{r}} f \cdot g + (-1)^{p(f)} f \cdot \Delta_{\mathfrak{r}} g + (-1)^{p(f)}\{f, g\}\,. \tag{75}$$

Следует особо отметить важность второй формулы, из которой вытекает, что скобку Пуассона можно определить через Δ-оператор.

Отметим, что оператор Δ_0 в уравнении (74) не является инвариантным оператором на функциях; он зависит от выбора координат Дарбу. Этот оператор может рассматриваться как $\Delta_{\mathfrak{r}}$ оператор в уравнении (72) для координатной форме объёма $\mathfrak{r} = D(x, \theta)$ в фиксированных координатах Дарбу. Если $\tilde{z}^A = \{\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_n\}$ другие координаты Дарбу, то из формулы (73) следует, что

$$\Delta_0 f = \widetilde{\Delta}_0 f + \frac{1}{2}\{\log \mathrm{Ber} \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}}, f\}\,, \tag{76}$$

где $\widetilde{\Delta}_0$ -это оператор (74) в координатах $\tilde{z^A} = \tilde{x^1}, \dots, \tilde{x^n}, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$.

Пример 8.1. Рассмотрим нечётное симплектическое суперпространство $E^{n|n}$. Мы полагаем для простоты, что (x^i, θ_j) $(i, j = (1, \dots, n))$ координаты Дарбу:

$$\{x^i, \theta_j\} = \delta^i_l \,, \{x^i, x^j\} = 0 \,, \{\theta_i, \theta_j\} = 0 \,.$$

В качестве формы объёма на $E^{n|n}$ возьмём координатную фпрму объёма $\mathfrak{r} = D(x, \theta)$. В силу (74) Δ-оператор этой структуры есть оператор

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial \theta_i} \,. \tag{77}$$

Теперь рассмотрим инфинитезимальное преобразование нечётного симплектического суперпространства $E^{n|n}$, индуцированное нечётным гамильтонианом $Q(x, \theta)$. Зададимся вопросом: как это инфинитезимальное преобразование меняет оператор Δ_0?

Инфинитезимальное преобразование переведёт координаты (x^i, θ_j) в новые канонические координаты $(x^{i'}, \theta_{j'})$

$$\begin{cases} x^{i'} = x^i + \varepsilon\{Q, x^i\} = x^i - \varepsilon\frac{\partial Q(x,\theta)}{\partial \theta_i} \\ \theta_{j'} = \theta_j + \varepsilon\{Q, \theta_j\} = \theta_j + \varepsilon\frac{\partial Q(x,\theta)}{\partial x^i} \end{cases} , \varepsilon^2 = 0 \,. \tag{78}$$

Давайте с учётом упрощающегося предположения, что это преобразование инфинитезимально. то есть $\varepsilon^2 = 0$, вычислим как меняется оператор под действием канонического преобразования (78).

Мы покажем, что нечётный гамильтониан индуцирует бесконечно-малое каноническое преобразование, не меняющее Δ-оператора (77) если

$$\Delta Q = 0 \,. \tag{79}$$